

中国教师发展基金会教师出版专项基金资助

# 瞬变电磁法拟地震偏移成像研究

李 貅 薛国强 著

Study on pseudo-seismic migration imaging of transient electromagnetic method

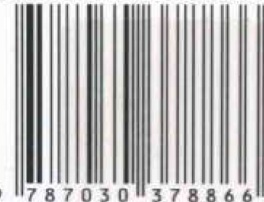


科学出版社

(P-2428.0101)

Study on pseudo-seismic migration imaging of transient electromagnetic method

www.sciencep.com


ISBN 978-7-03-037886-6

科学出版社 地质分社
E-mail：earthscience@mail.sciencep.com

销售分类建议：地球物理／电磁法／地震成像

定价：68.00元

中国教师发展基金会教师出版专项基金资助

# 瞬变电磁法拟地震偏移成像研究

李　貅　薛国强　著

科学出版社

北　京

## 内 容 简 介

本书是作者近十多年来在瞬变电磁拟地震方法技术研究与应用实践的基础上写成的。书中介绍了作者在该领域理论方法和实际应用方面的系列重要成果。本书系统地论述了瞬变电磁波场转换原理及方法、瞬变电磁虚拟波场特性，研究了瞬变电磁拟地震方法的重要技术：虚拟子波宽度压缩技术、合成孔径技术、三维偏移成像技术等。本书可供大、中专院校地球物理、地球探测与信息技术等专业师生、科研单位研究人员以及相关单位工程技术人员参考使用。

**图书在版编目(CIP)数据**

瞬变电磁法拟地震偏移成像研究 / 李貅，薛国强著. —北京：科学出版社，2013.6

ISBN 978-7-03-037886-6

Ⅰ. ①瞬… Ⅱ. ①李… ②薛… Ⅲ. ①瞬变电磁法-模拟-地震偏移-地震层析成像-研究 Ⅳ. ①P631.4

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第131554号

责任编辑：韩 鹏 张井飞 责任校对：包志虹

责任印制：钱玉芬/ 封面设计：陈四雄

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www. sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013年6月第 一 版 开本：B5（720×1000）

2013年6月第一次印刷 印张：9 插页：12

字数：202 000

**定价：68.00元**

（如有印装质量问题，我社负责调换）

# Preface 序　言

瞬变电磁法以其独特的优点广泛应用于资源勘查、工程勘察、地质灾害调查等领域，并越来越受到广大地质科技工作者的青睐。随着把地震学中已有的和正在发展的方法技术应用到瞬变电磁法中的研究不断进步，瞬变电磁测深偏移成像方法技术的研究也成为当今勘探电磁领域研究的热点。人们越来越关注像拟地震解释法、电磁偏移成像以及偏移与反演相结合的研究方法。这些方法从波场的角度，拓展和丰富了瞬变电磁场的内涵，使得从实测资料中提取到常规瞬变电磁法提取不到的、对地下目标体成像更有利的信息。

面对资源勘查（深部矿、盲矿）和工程勘察（精细勘察）方面对地球物理工作要求的提高，研究开发瞬变电磁法拟地震的多次覆盖技术是十分必要而且有重要实际意义的。另外，多分量、阵列式的观测技术可以获得丰富的地电信息，其方法技术研究也已经引起人们的重视。研制抗干扰能力强的多分量、多通道适合开展阵列式观测的瞬变电磁探测系统，大功率、多功能、智能化及适时数据处理功能等是现代仪器的发展方向，另外，研制高灵敏度、高性能、三分量观测探头也是高分辨瞬变电磁仪的重要环节。

在前人研究的基础上，笔者先后和二十多位研究生一起研究瞬变电磁拟地震资料解释方法技术。提出从瞬变电磁场到波场的优化算法，将正则化算法用于逆变换过程的计算中，成功地提取出虚拟地震子波。通过实验发现，采用多孔径辐射场源能得到比单孔径辐射场源更强的磁场分布这一现象的存在，从一次场观测结果看出多孔径场明显地改善了磁场的方向性，证明了多孔径瞬变电磁场存在相关叠加现象；完成了虚拟子波宽度压缩技术研究，用基尔霍夫积分法进行电磁波场偏移成像处理，实现了瞬变电磁场的三维曲面延拓计算；从瞬变电磁场本身的特性出发，基于等效导电平面的理论，提出瞬变电磁虚拟波场连续速度分析方法，初步取得了瞬变电磁拟地震资料解释的阶段性成果。

我们出版本研究专著，以便对该方法技术感兴趣的读者阅读和参考。全书共分 7 章，第 1 章介绍瞬变电磁法的发展概述和研究展望；第 2 章为波场转换基本原理；第 3 章研究瞬变电磁虚拟波的波场特性；第 4 章介绍合成孔径技术及虚拟子波宽度压缩技术；第 5 章介绍瞬变电磁虚拟波场三维曲面延拓成像技

术；第 6 章介绍虚拟波场的速度分析；第 7 章给出理论模型数值模拟结果以及我们近年来的工作实例。

全书主要由李貅负责撰写，薛国强负责第 1 章、第 4 章的撰写和全书的编排和校对工作。往届毕业的研究生戚志鹏、郭文波、马宇、全红娟、武军杰、范涛、刘银爱、吴琼、朱宏伟、张旭等，以及在读研究生孙怀凤、钱建兵、张莹莹等都对方法的研究以及本书的出版做出了贡献。博士生周楠楠对瞬变电磁物理量信息进行了整理，博士生陈卫营对公式进行了核对。硕士生李海对书中参考文献进行了校对。

本书是在作者近年来所承担的国家自然科学基金项目和企业委托项目的基础上完成的。但由于瞬变电磁法在我国开展研究和应用的时间相对较晚，特别是瞬变电磁拟震解释理论与应用研究还处于初步阶段，还需要继续深入研究。加上作者水平有限，不妥之处在所难免，敬请专家和读者批评指正。

李　貅

2012 年 11 月 8 日于长安大学

Contents 目 录

序言
第 1 章 瞬变电磁法发展与展望 …… 1
1.1 瞬变电磁法发展概述 …… 1
1.2 瞬变电磁法的发展方向 …… 3
1.3 瞬变电磁法拟地震解释研究的前沿课题 …… 7
1.3.1 基于时-频等效转换的瞬变电磁成像技术 …… 7
1.3.2 基于波场转换的瞬变电磁成像技术 …… 8
1.3.3 逆时偏移成像方法 …… 10
第 2 章 瞬变电磁场的全域波场变换原理 …… 12
2.1 瞬变电磁场与虚拟波场关系式的建立 …… 12
2.2 波场反变换式的不适定性 …… 14
2.2.1 反问题与第一类算子方程的不适定性 …… 14
2.2.2 波场变换方程的不适定性分析 …… 15
2.3 波场变换的数值化方法 …… 19
2.3.1 数值化方法 …… 19
2.3.2 最优化方法 …… 20
2.4 波场逆变换的预条件共轭梯度正则化算法 …… 21
第 3 章 瞬变电磁虚拟波场的波场特性分析 …… 25
3.1 两层模型分析 …… 25
3.1.1 单正峰波场记录模型 …… 25
3.1.2 单负峰模型分析 …… 35
3.2 三层模型分析 …… 45
3.2.1 双正峰虚拟波场记录 …… 45
3.2.2 正负双峰虚拟波场记录 …… 48
3.2.3 负正双峰波场记录 …… 52
3.2.4 双负峰波场记录 …… 56
3.3 时间域响应加噪后的波场特征 …… 59

**第 4 章　合成孔径算法与子波宽度压缩** …… 74
4.1　合成孔径成像算法…… 74
4.2　子波宽度压缩…… 75
4.2.1　波形展宽的现象…… 76
4.2.2　波形展宽的原因…… 77
4.2.3　利用反褶积技术压缩波场宽度…… 79
4.2.4　模型计算…… 81
**第 5 章　瞬变电磁场拟波动方程三维曲面延拓成像** …… 85
5.1　基尔霍夫绕射积分的建立…… 85
5.2　基尔霍夫积分偏移（曲面延拓）…… 90
5.3　波场延拓的边界单元法…… 92
5.3.1　基尔霍夫积分的离散化…… 92
5.3.2　单元分析…… 92
5.3.3　合成矩阵…… 94
5.3.4　单元积分的计算…… 94
**第 6 章　TEM 虚拟波场速度分析** …… 99
6.1　基于等效导电平面法的速度建模原理…… 99
6.1.1　等效导电平面法基本原理…… 99
6.1.2　水平层状介质表面的瞬变电磁场的近似计算 …… 101
6.1.3　$\bar{m}$ 参数的优化提取 …… 103
6.2　单个测点的速度建模方法 …… 105
6.3　连续速度分析 …… 106
6.3.1　全局距离加权插值 …… 106
6.3.2　近点线性插值 …… 108
**第 7 章　理论模型成像计算与应用实例** …… 116
7.1　模型计算 …… 116
7.1.1　层状模型 …… 116
7.1.2　三维模型 …… 118
7.2　应用实例 …… 124
7.2.1　隧道超前预报实例 …… 124
7.2.2　煤矿采空区探测实例 …… 126
**参考文献** …… 132
**彩图**

# 第 1 章　瞬变电磁法发展与展望

## 1.1　瞬变电磁法发展概述

瞬变电磁法最早在 20 世纪 30 年代由原苏联科学家提出，当时采用的是远区工作模式。但是，利用电流脉冲激发供电偶极形成时域电磁场是由美国科学家 L. W. Blau 于 1933 年最先提出的，当时利用不同电导率地层界面电磁波的反射与地震反射波信号的相似性，进行了大量的实验和比较，但由于脉冲激发的瞬变响应频率较低，难以得到识别各个反射波所需要的分辨率，瞬变电磁法一直受到冷落。到了 20 世纪五、六十年代，苏联科学家成功地完成了瞬变电磁法的一维正、反演，建立了瞬变电磁法的解释理论和野外工作方法之后，瞬变电磁法才开始进入实用阶段。20 世纪 60 年代以后，当意识到时间域电磁测深法可以利用远远小于期望探测深度的收发距时，该方法有了一个快速发展。在苏联，组建了数十个瞬变电磁法探测队伍，在油气勘探领域开展工作，并取得了卓有成效的勘查效果。随之，“短偏移”、“晚期”、“近区”等技术研究迅速发展起来。20 世纪七、八十年代，在美国等西方国家短偏移法一直处于研究和实验阶段，未被广泛运用，而长偏移法已得到了应用，特别是在地热调查和地壳结构的调查中。随后一些专家对瞬变电磁法的一维正、反演方法技术进行了大量研究。20 世纪 80 年代后随着计算机技术的发展，欧美学者在二、三维正演模拟技术方面，发表了大量用有限差分法、有限元法、积分方程法等进行电磁法数值模拟研究的论文。理论和认识的提高推动了瞬变电磁法探测应用的发展。电磁法理论方面的主要代表著作有考夫曼和凯勒（1987）的专著《频域和时域电磁测深》，米萨克 N・纳比吉安（1992）主编的《勘查地球物理・电磁法》第一卷。与此同时，苏联学者别尔季切夫斯基和日丹诺夫（1985）提出电磁波拟地震波的偏移方法，他们吸取了“偏移成像”的广义概念，在电磁法中确定了正则偏移和解析法偏移两种方法。随后，一些成像技术研究的成果相继出现，Macnae（1987）、Eaton 和 Hohmamn（1987，1989）等完善了电导率成像方法，Ghristensen（2002）对瞬变电磁数据一维成像进行了研究。20 世纪 90 年代初，Lee 和 Xie（1993）推导了二维成像解释方法。de Hoop（1996）认为瞬变电磁法与反射地震勘探具有相似性原理。Gershenson（1993）提出用波的扩散传播特性解释时间域电磁测深资料。Kunetz（1972）研究了

大地电磁与地震弹性波场之间的内在联系，Lee 和 Memechan（1987）根据电磁波与地震波的相似性利用差分法的二维偏移实现了电磁数据成像。20 世纪 80 年代末，别尔季切夫斯基和日丹诺夫（1985）又从激发极化现象理论出发，研究了时间域瞬变电磁法的激电效应特征及影响，解释了瞬变电磁法晚期电磁响应的变号现象，并对三维极化体的瞬变电磁响应特征进行了数值计算。

在我国，对瞬变电磁法的研究始于 20 世纪 70 年代，较早开展工作这项工作的有牛之琏（1986，1992）、朴化荣（1990）、曾孝箴等，他们将脉冲式航电仪用于地质填图和找矿中；蒋邦远（1998）等将瞬变电磁法用于普查勘探良导金属矿实践中，并研制出了电磁脉冲瞬变系统；牛之琏（1986，1992）将瞬变电磁法用于金属矿勘探上，取得了显著的效果，并与长沙智通新技术研究所合作研制并生产了智能化瞬变电磁仪；朴化荣（1990）用 G－S 逆拉氏变换法实现了电性源瞬变电磁测深的正演计算；方文藻等（1993）用线性数字滤波技术实现了大回线源瞬变电磁测深的正演计算，并将大回线源瞬变电磁测深法广泛用于地热和地下水调查、工程调查和地质灾害调查，又将瞬变电磁法用于大地电磁测深曲线的静校正，取得了良好的效果。在一维、二维数值模拟方面，王华军和罗延钟（2003）从事研究并发表了相关论文，王华军（2003）、陈伯舫等（1998）、陈明生（1999）、殷长春和刘斌（1994）等对二维、三维瞬变电磁正、反演进行了研究。王家映等（1985）、王家映和方胜（1986）、王家映（1990）通过分析平面电磁波与地震波的相似性，对大地电磁的拟地震解释进行了系统的研究；于鹏和王家林（2001）、于鹏等（2003）在对电磁场偏移研究的基础上，提出了改进的有限差分法大地电磁场偏移成像技术；李貅等（2005b）对瞬变电磁测深开展了微分电导成像的研究工作，并提出从瞬变电磁到波场的优化算法，通过波场转换，对瞬变电磁虚拟波场的三维曲面延拓成像进行了研究；陈本池等（1999）对波场变换进行了研究，用模拟数据成功地获得了单一界面的二维地质结构的图像，王华军和罗延钟（2003）对瞬变电磁测深波场变换中的波形展宽原因探讨；吕国印（1998）研究了二维瞬变电磁逆时偏移；薛国强（2005）提出并开展了瞬变电磁对地成像理论和成像数值计算方法的研究；闫述（2002）用时间域有限差分法对地下瞬变电磁响应进行了数值计算，并在瞬变电磁测深的联合时-频解释方面进行了研究；郭文波（2001）通过分析均匀介质和分层媒质中电磁波与地震波的传播特征，认为回线源中心激发的瞬变电磁场在地下扩散可近似看成球面波形式传播，在晚期球面波接近于平面波，与地震波有相似的传播特征，在时-频转换的基础上，通过求取发射函数序列实现了瞬变电磁资料拟地震解释法。

国内主要的著作有《电磁测深法原理》（朴化荣，1990）、《脉冲瞬变电磁

法及应用》（牛之琏，1986）、《时间域电磁法原理》（牛之琏，1992）、《瞬变电磁测深原理》（方文藻等，1993）、《实用近区磁源瞬变电磁法勘探》（蒋邦远，1998）、《瞬变电磁测深的理论与应用》（李貅，2002）等。

在仪器的研制方面，国内多家科研院所从 20 世纪 80 年代末开始相继研制成功了各具特色的瞬变电磁仪。例如，中国地质科学院物化探研究所研制开发的 WDC－1、WDC－2 与 IGGETEM－20 瞬变电磁仪；西安强场源物化探研究所刘显跃等研制的 LC－1、EMRS－3 等小线圈、大电流瞬变电磁系统；中南工业大学牛之琏与长沙智通新技术研究所联合研制生产的 SD－1、SD－2 瞬变电磁仪；长沙白云仪器有限公司生产的 MSD－1 轻便型瞬变电磁仪器；北京矿产地质研究所王庆乙（1999）研制的 TEMS－3S 瞬变电磁仪；吉林大学林君等（2004）研制的 ATEM－2 瞬变电磁仪等。很多勘查单位购买了国际上先进的装备，如美国 ZONG 研制生产的 GDP－12、GDP－16、GDP－32 多功能电法系统，加拿大凤凰公司生产的 V5、V6、V8 系统，加拿大 Geonics 公司生产的 PROTEM 瞬变电磁系统接收机（EM37、EM47、EM57、EM67 等），澳大利亚生产的 SIROTEM－Ⅱ、Ⅲ，Terra TEM 仪器等，从而推动了瞬变电磁法的工作，并获得了大量有价值的研究成果及成功的应用实例。

1992 年以来，随着仪器的智能化与数字化，瞬变电磁法开始迅速步入工程、环境、灾害地质调查中，如探测地下采空区、陷落柱等煤田灾害、划分地下断层、寻找地下水、金属矿产勘探、石油和煤炭等非金属矿产调查、工程场地地质勘察、隧道超前地质预报等领域。目前，瞬变电磁法已经几乎涉足了勘探地球物理的所有领域，取得了良好的效果。

## 1.2　瞬变电磁法的发展方向

瞬变电磁法作为一种重要的电磁勘探方法，以其独特的优点（经济、无损、快速、信息丰富、分辨力强等）广泛用于资源勘探和工程勘察中。但针对一些具体的精细探测问题，如高速公路和铁路建设中的隧道超前地质预报精细探测、大型重要古墓的墓室结构精细探测、大型水坝隐患精细探测等，常用的瞬变电磁法的分辨率受到限制，探测效果受到影响，这是因为常规方法要想提高信噪比，就要加大发射回线的面积，加大发射磁矩，但随着发射回线面积的加大，体积效应的影响随之加强，也就影响了分辨率的提高。从目前看，在理论研究、仪器研制方面处于初级阶段。理论研究虽已解决了一维正、反演问题，但在二、三维的研究还未达到应用程度，而仪器大多是在国外仪器基础上的开发和改进，应用推广并不普遍。

随着探测分辨率和精度要求的提高，迫切需要从两个方面对极有发展前途的瞬变电磁法进行深入的研究，一方面是在探测的方法技术方面研究多孔径阵列式观测方式，目的是在保证一定探测深度及不增加体积效应的前提下，提高对目标体的分辨率；另一方面是在原有解释方法理论基础上对正、反演问题做更深入的研究，探索新的反演理论并对其进行系统化，建立系统的瞬变电磁解释正、反演理论，同时使瞬变电磁法的解释向三维方向迈进，使这一方法能更好地解决一些高难度的精细探测问题。

自 20 世纪 70 年代以来，瞬变电磁法在我国研究、应用已有 30 余年的历史，在理论（包括解释理论）研究、方法技术方面取得了长足进步。虽然先后发表出版了大量有关瞬变电磁理论与应用方面的论文与专著，解释理论、方法技术、勘察效果等方面均有报道，但从目前看，在理论研究、仪器研制方面仍处于初级阶段。

有专家认为，正是由于电磁法理论本身的复杂性，对用户在仪器设备和基础理论方面的知识要求更高，因此方法的进展相对缓慢。国内仪器生产的规模性和持续性较差，加之应用推广并不普遍，受市场经济的影响，国内越来越多的生产单位和科研院所都购置了国外生产的多功能、多方法仪器，使国内自成体系的方法研究、装备研发以及技术发展受到制约。与发达国家相比，瞬变电磁法在我国的应用方面与西方国家大体相当，其他方面仅相当于国外 20 世纪 90 年代的水平，而复杂地电条件下的正、反演解释国内可以说尚处于入门阶段。何继善（1997）院士指出，电磁法二维、三维反演方法和成像技术将是理论研究中的重要方向。就目前瞬变电磁法的理论与应用，仍面临以下几方面的问题。

（1）在信号采集方面：众所周知，瞬变电磁探测是观测一次场间歇期间地下介质感应产生的随时间变化的二次场。其特点是：①信号动态范围大，观测信号的幅值及其衰减快慢取决于探测的地下介质（地质体）的时间常数 $\tau$ 值，对于良导体，信号衰减较慢，时间范围一般从几十微秒到几百毫秒，信号的幅值一般从数十或上百毫伏变到零点几微伏；②感应信号的频带宽，瞬变电磁探测信号的频谱成分十分丰富，频带范围一般为 $n \sim n\times10^4$ Hz；③探测的信号受干扰噪声影响大，瞬变电磁探测一般在晚期观测，晚期探测信号一般为微伏量级，这时观测频带内的各种天然及人文干扰噪声相对较强，实际观测到的是各种信号的叠加，要提高信噪比，就要提高仪器的灵敏度或增大发射功率。因此，如何采集到并分离出丰富的能反映地下介质地电特性的有用信号，是瞬变电磁勘查能否成功的关键。

目前的观测技术，多数瞬变电磁仪器是在连续的等对数时间间隔窗口内采集来获得感应二次场的衰减曲线的，一般为 20～40 道，信息量十分有限。

GDP－32 多功能电法系统实现了算术等时间间隔的采样功能，大大提高了采样密度，可观测几百至上千道的数据，比常规对数间隔采样获得更丰富的地电信息，但晚期道很多比有用信息强的干扰噪声同时进来了。如何获取并分离出含丰富地电信息的有用信号，仍是地球物理工作者需解决的问题。

对于瞬变电磁探测，不论长偏移距还是近区观测，目前的观测参数多为磁场的垂直分量。有学者提出应同时观测水平分量，但鲜有成功应用的文献报道。因此，研究开发多分量、阵列式的观测技术对促进瞬变电磁探测的应用发展具有重要的现实意义。

（2）解释理论方面：国内外有关瞬变电磁法解释理论方面的文献报道很多，主要有浮动薄板解释法（视纵向电导解释法）、烟圈理论解释法、瞬变电磁时-频转换反演，一维、二维正、反演人机联合解释法等。

以往解释所用信号和参数单一，尚未见有多分量、矢量合成、多参数联合解释方面的报道；复杂条件下的二维、三维正反演解释还不成熟，尚处于研究探索阶段。因此，探索研究瞬变电磁多分量快速解释方法和合成矢量解释方法，研究开发阵列式观测资料的处理方法和快速适用的二维、三维正反演解释理论的研发，将极大地提高瞬变电磁探测的分辨能力及解释精度，丰富瞬变电磁探测的解释理论。

（3）方法实用性方面：瞬变电磁法应用领域广泛，受人们重视、关注的程度越来越大。尽管该方法有独特的优点，但在某些特殊地质地貌开展工作仍会遇到各种困难，例如，地形切割严重的秦岭山区开展金属矿瞬变电磁探测，工作布置困难，采样难度大，由于地形恶劣、植被发育，工作甚至不能开展；海洋瞬变电磁工作，虽有学者在从事实验研究，但仍沿用传统的装置方式、观测技术，效率低、工作难度大。另外，随着找矿难度的增大，需要在干扰大的矿区及外围开展大深度的勘查工作；工程勘察方面往往需要解决精细构造、复杂断面等方面的问题，这就给地球物理工作者提出了更高的要求，迫切需要研发抗干扰能力强的、勘探深度大的、分辨能力强的、解释精度高的方法技术。因此，开发经济有效的瞬变电磁探测工作装置、快速观测技术、精度高的解释理论是瞬变电磁法探测应用研究的一个方向。

地震勘探共深度点多次覆盖技术为我们提供了研究思路，开发应用阵列式多分量观测方法与技术将快速获得更丰富的地电信息，模仿地震勘探共深度点叠加法，研究阵列式多分量观测资料的快速适用的解释方法将大大提高瞬变电磁探测的解释精度，丰富瞬变电磁探测的解释理论，从而对瞬变电磁（航空和海洋瞬变电磁）的应用发展带来更加广阔的前景。

因此，可以将瞬变电磁法的发展方向概括为以下几个方面。

（1）理论研究方面：在注意发展研究复杂地电条件下二、三维问题正反演

的同时，更应注意实际应用效果，瞬变电磁拟地震的偏移成像技术、瞬变电磁法各种干扰信号的分离技术研究和解释方法也是一个值得注意的研究方向。当前国内、外学者正在寻找一个数学上的处理办法，将瞬变电磁场变换成波场，即将电磁响应中与传播有关的特征提取出来，而把电磁波传播过程中与频散、衰减有关的特征进行压制或去除。如果能够实现，就能将瞬变电磁场的求解问题转化为大家所熟悉的波动方程的求解问题，就能将地震偏移成像技术、Born 近似反演技术、脉冲谱反演技术、层析成像反演技术等用于瞬变电磁场的反演解释中。基于电磁波在导电介质中的传播和地震波在弹性介质中传播的运动的相似性建立起来的反演解释方法这些年来有了很大发展，取得了卓有成效的研究成果，在一定程度上缩小了解的非唯一问题，扩大了电磁法的应用范围，并可希望从观测资料中提取常规反演方法得不到的更多、更准确的地下信息。

另外，经典瞬变电磁理论将磁性源和电性源看做偶极子，利用稳恒电流场的磁偶极子或静电场的电偶极子公式，比拟到谐变场的频域表达式，再经频域到时域的变换得到解析公式。这种基于偶极子的理论公式在瞬变电磁法的发展中起到了重要作用，但还不能完全反映场的特性、不能适应精确勘探的需要。可以用时变点电荷载流微线元代替偶极子微元，可以不再经过 Fourier 变换或 Laplace 变换，直接在时间域中推导层状介质表面上大回线和长接地导线源的瞬变电磁场解析解。通过研究时域辅助函数的选取、时变点电荷载流微元的处理、含特殊函数积分算法，分析瞬变场在典型地层和不同场区情况下的响应特征等，建立新的电磁场理论体系。这一研究方向将突破长期沿用的偶极子理论，用真正的微元代替偶极子微元，减小非偶极子和时域频域转换误差，可以很好地反映全场区的电磁特性，为瞬变电磁法的进一步发展和实际勘探提供研究思路。

（2）方法技术方面：瞬变电磁法拟地震的多次覆盖技术研究是十分重要的，另外，多分量、阵列式观测技术研究也不应忽视。

针对目前较广泛使用的瞬变电磁回线源装置，开展高分辨瞬变电磁法全域探测技术研究，或者开展对以往方法技术的改进研究，将会大大提高瞬变电磁探测的纵向和横向分辨能力，从而提高解决地质问题的精度，为精细工程地质勘察提供方法、技术上的支撑。

（3）仪器方面：主要是发展多通道、大功率、多功能、智能化电测系统，高灵敏度、高性能探头的研制是现代电磁仪研制开发的难点。受市场和国外仪器的冲击，国内仪器需要向高性能、高分辨方向发展，乃是当务之急。

## 1.3　瞬变电磁法拟地震解释研究的前沿课题

### 1.3.1　基于时-频等效转换的瞬变电磁成像技术

近年来，利用瞬变电磁场勘探石油、地热源和各种矿产资源的理论和应用研究工作在不断发展，对于探测埋在地下的低阻异常体，瞬变电磁法已被证明是一种有效的方法。但是，由于在分层、有耗媒质中电磁现象的复杂性，目前对实测数据的解释水平仍很低。近年来人们正深入研究二维、三维的复杂模型，力图更准确地描述大地中的电磁瞬变现象，并设法从电磁响应中获得地下结构的局部形状和尺寸等高分辨信息。

中心回线瞬变电磁法是一种近区观测的电磁探测方法。由于场源的特殊性，在介质中传播的电磁场是扩散场。在研究回线源瞬变电磁法对地成像时，这一问题是不容回避的问题，这样，由扩散场向平面波场数据转换就成了问题研究的关键。

郭文波等（2005）从大量模型计算入手，通过对两种场源测深正演数据的分析、对比，以及对两种场在地下介质中传播的特性分析，建立了一种从瞬变电磁测深数据向平面波场转换的时间-频率对应关系。

通过大量的理论模型正演计算、曲线对比、误差分析，结合场的特性分析，从两种场的穿透深度及反映地下电性结构一致性角度，经过详细推导，得出瞬变电磁测深视电阻率数据可以转换成平面波场视电阻率数据的结论，构造了由时间到频率的转换关系式

$$210/f = t \tag{1.1}$$

式中，$f$ 为频率，$t$ 为观测时间延迟，这一关系可以从两种场在地下介质中传播的时间、速度、深度等方面加以说明。电磁场在地下介质中的扩散速度与地下介质的电阻率及时间有关系。在阶跃波断开后的某一时间延迟内，扩散深度与速度的关系如下

$$D(t) = \int_0^t V_{\mathrm{d}}(\rho, t')\mathrm{d}t' \tag{1.2}$$

式中，$D\ (t)$ 是扩散深度，$V_{\mathrm{d}}\ (\rho,\ t')$ 是扩散速度，$\rho$ 是介质的电阻率，$t'$是断电后的时间延迟。

为了推导瞬变电磁场在地下的传播速度及深度，我们分析瞬变电磁场在地下的建场机制及过程。在场源激励下，地下介质中产生涡流，在阶跃波断开后，涡流不会立即消失，而是有一个过渡过程，在这个过程中，由地下介质所产生的二次感应场经过了一个由无到有，由小到大、到极大、到衰减、再到无

的过程。对于地下某一深度，磁场微分量初始值为零，经过建场，到达极大值，最后衰减到零。某一频率或者某一时间的电磁场分布在地下的任何深度内。从地球物理勘探的角度看，电磁探测深度与仪器的检测灵敏度、地电情况、围岩情况、噪声电平等因素有关。在比较理想的情况下，也可能探测到埋深相当于几倍的趋肤深度（或者扩散深度）的地下地质体，在复杂地质情况下，也可能探测不到埋藏在趋肤深度（或者扩散深度）以内的地质体。但是，总的来说，对于同一介质的同一深度，扩散场的视电阻率与平面波场的视电阻率对此深度地电性结构应该有相同的反映。

在一维近似的情况下，把趋肤深度和扩散深度等效认为是电磁场的探测深度。这样，令两个深度相等，从而可以找到频率与时间的类似式（1.1）的关系式。

薛国强等（2004）提出了瞬变电磁法对地成像理论和成像数值计算方法，其原理是根据所构造的扩散场向平面波场转换时的时间-频率关系式，把时间转换成频率，这样就完成了扩散场数据向平面波场的转换。由转换后的视电阻率值求出平面波场的波阻抗，再由计算出来的波阻抗，建立关于电性层反射系数序列的方程组，再通过线性规划法，求出反射系数序列，最终以反射系数为参数绘制成像剖面。

该方法给出了瞬变电磁法对地成像数值计算步骤：①给出各种不同地电模型，分别进行正演计算，计算出视电阻率值，根据不同的地表电阻率，对早期道数据进行校正；②通过转换关系，把时间延迟变成频率，对理论模型正演数据或者实测视电阻率值进行域的变换，把时间域扩散场视电阻率值变成平面波场视电阻率值；③由平面波场视电阻率值在频率域求出波阻抗；④以波阻抗为参数，构建方程组；⑤用线性规划法求出反射系数序列；⑥最终以反射系数为参数进行成像。

### 1.3.2 基于波场转换的瞬变电磁成像技术

由于瞬变电磁场满足的微分方程事实上是一个扩散方程，因而不能采用目前大家熟悉的波动方程求解方法。所谓瞬变电磁场的波场变换是指通过数学积分变换，将满足扩散方程的时域瞬变电磁场转换为满足波动方程的波场，然后借助于地震中发展起来的一些比较成熟的成像方法技术，求解被探目标体的物性和几何参数。

Weidelt（1972）、Kunetz（1972）、Levy 等（1988）、Lee 和 Memechan（1987）等于 20 世纪 70 年代和 80 年代的一些研究成果，都分别揭示了在层状大地介质中，电磁扩散方程与地震波动方程间存在有趣的数学对应形式，但他们研究问题的着眼点都是将对应地电模型的波场模拟结果变换成时域电磁响

应。但是，更能激起学者们研究兴趣的是波场逆变换，将已知时域场转换为波场，这将有利于偏移以及更加复杂的成像技术的应用。

从波场到时域场的波场正变换式

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty}\tau \mathrm{e}^{-\tau^{2}/4t}\boldsymbol{U}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.3}$$

式中，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(t)$ 表示瞬变电磁场量，$\boldsymbol{U}(\tau)$ 表示虚拟波动参量，$\tau$ 表示虚拟时间。

这一变换过程称为正问题（direct problems）。如果反过来，已知时域场求波场，则称为反问题（inverse problems）。

众所周知，反问题往往和不适定性（ill-posed）紧密相联，各种各样的反问题，不仅出现于地球物理问题中，而且出现于数学本身。波场正变换式是典型的第一类 Fredholm 型算子方程，而它有一个重要的特征，就是所谓的“不适定性”。关于“适定”（well-posed）和“不适定”（ill-posed）的概念是 Hadamard 为了描述数学物理问题与定解条件的合理搭配，于 20 世纪初引入的。

瞬变电磁场所满足的扩散方程主要刻画电磁涡流场的感应扩散特征，而基于扩散方程的偏移成像及反演方法，一般对电性界面的分辨能力较差，这就需要寻找到一个数学上的处理办法，将瞬变电磁场变换成“波场”，即提取出电磁响应中与传播有关的特征，压制或去除电磁波传播过程中与频散、衰减有关的特征。将瞬变电磁场的求解问题转化为波动方程的求解问题，就能将地震偏移成像技术、Born 近似反演技术、层析成像反演技术等用于瞬变电磁场的反演解释中。

李貅等（2005b）提出了从瞬变电磁场到波场的优化算法。在波场的正变换中，在保证瞬变电磁场的计算精度的同时，应用两步最优化算法，成功地控制和减少了积分系数的个数和离散数字积分的采样点个数，解决了在波场反变换式中，由于积分系数过多而产生的欠定方程组的问题，同时改善了第一类算子方程的不适定性。在波场反变换中，将正则化算法用于逆变换过程的计算中，通过采用偏差原理和 Newton 迭代格式选出最优的正则化参数，使得反变换所得到的波场稳定、可靠。通过对数值计算结果与已知波场函数对比，证明了该方法的有效性和实用性。大量的理论计算表明，这种变换得到的虚拟波场，不仅满足波动方程，而且还类似于地震子波一样，具有传播、反射、透射特征。

通过理论研究已经解决了瞬变电磁场的波场变换问题，这就为瞬变电磁场的偏移成像创造了条件。但瞬变电磁场偏移成像问题与地震勘探中的弹性波偏移成像问题有相似之处，但也不完全相同。需要指出，TEM 虚拟波场是经过

数学变换得到的，不是客观存在，因此，还有其特殊性。

### 1.3.3 逆时偏移成像方法

1. Stratton-chu 积分偏移成像方法

Zhdanov 等（1988）、Zhdanov 和 Booker（1993）、Zhdanov 和 Li（1997）、Zhdanov 和 Portniaguine（1997）借鉴了地震勘探中的逆时偏移概念，经过十余年的系统研究，对时间域的瞬变电磁场进行了逆时偏移成像的深入研究，提出了偏移电磁场的概念，并且在逆时偏移电磁场基础上对二、三维反演问题也展开了最新的研究。瞬变电磁场的偏移应用的是 Stratton-Chu 积分

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{t'}\iint_\Gamma\left\{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla\boldsymbol{G}^* + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla\boldsymbol{G}^* + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{H})\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{G}^*}{\partial t}\right\}\cdot \mathrm{d}S\mathrm{d}t = \boldsymbol{H}(r',t) \tag{1.4}$$

式中，

$$\boldsymbol{G}^* = \frac{(\mu_0\sigma)^{1/2}}{2\pi^{1/2}(t'-t)^{3/2}}\exp\left|-\frac{\mu_0\sigma|r'-r|}{4|t'-t|}\right|u(t'-t) \tag{1.5}$$

这里，

$$u(t'-t) = \begin{cases}1 & t < t' \\ 0 & t > t'\end{cases} \tag{1.6}$$

式中，$\boldsymbol{G}^*$ 是引入的格林函数，$\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 是地表 $\boldsymbol{\Gamma}$ 上的电场和磁场，$\boldsymbol{n}$ 是 $\boldsymbol{\Gamma}$ 的外法线方向的单位矢量。式（1.4）表明，可以通过将地表观测到的电磁场值向下延拓，得到地下电磁场的分布，延拓后的电磁场值在界面处发生突变，由此可以确定地下介质的地电构造。Zhdanov 等主要对孤立和多个电性异常体的模型做了实验研究，成像效果较好。

2. 基尔霍夫（Kirchhoff）积分偏移成像方法

利用优化算法，将瞬变电磁场进行波场变换，得到“波场”，将波场分析的原理即地震波场从地面向地下反向外推进行偏移成像的方法用于对瞬变电磁场的解释，形成瞬变电磁场的偏移方法，也就是对观测电磁数据向下延拓，构建产生响应的地下电阻率图像。

李貅（2005）给出了基尔霍夫积分法进行电磁波场偏移成像处理的数值计算方法。波场在地下传播可以用波动方程描述，其方程为

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \boldsymbol{F}$$

上述方程的基尔霍夫积分解为

$$\boldsymbol{U}(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi}\oiint\left\{[u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - \frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{Q} + \frac{\boldsymbol{F}}{r_0} \tag{1.7}$$

对于 $\boldsymbol{u}$ $(x, y, z, t)$，当把 $t$ 变为 $-t$ 时，既是 $\boldsymbol{w}$ $(x, y, z, t)$ $=\boldsymbol{u}$ $(x, y, z, -t)$ 时，$\boldsymbol{w}$ $(x, y, z, t)$ 仍可满足同样的波动方程。对于 $\boldsymbol{w}$ $(x, y, z, t)$ 是时间向前的问题，对于 $\boldsymbol{u}$ $(x, y, z, t)$ 就是时间“倒退”的问题。可以把反射界面的各点作为同时激发上行波的源点。这样，我们可以把地面上的接收点作为二次发射源，将这些信息值时间“倒退”到原来状态，寻找反射界面的波场函数，以确定反射界面。

设自激自收的上行波为 $\boldsymbol{G}$ $(x, y, z_0, t)$，它是地下反射界面作为源点发射的波场 $\boldsymbol{g}$ $(x, y, z, t)$ 在地面上 $z=z_0$ 上的值，由式（1.7）可得

$$\boldsymbol{g}(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}-\frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\boldsymbol{G}\left(\xi,\eta,\xi_0,t+\frac{r}{v}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{Q}+\frac{\boldsymbol{F}}{r_0} \tag{1.8}$$

式中，$\boldsymbol{G}$ $(\xi, \eta, \zeta_0, t+\frac{r}{v})$ 中的时间变量取 $t+\frac{r}{v}$，是由于现在考虑的是波动的逆过程；事实上是由 $\boldsymbol{g}$ $(x, y, z, t)$ 在地表面上的值 $\boldsymbol{g}$ $(\xi, \eta, \zeta_0, t)$ 求出地下的波场值，从而确定反射界面，这即是波场的向下延拓。

将三维边界元技术引入到基尔霍夫积分计算中来，其最大的好处是能够实现三维曲面延拓计算，这在地震勘探中是很难实现的，这是由于式（1.8）中存在 $\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial n}$ 项，地震勘探中无法进行地表垂向梯度测量，相反瞬变电磁法利用梯度探头可以很容易地实现地表垂向梯度测量。另外，在速度分析中，可将瞬变电磁法中的反演技术融入其中，一方面，实现连续速度分析；另一方面，也可将反演与偏移成像相结合，提高解释的可靠程度。

通过对时间域的瞬变电磁场进行逆时偏移成像的深入研究，将瞬变电磁虚拟波场从地面向地下反向外推进行偏移成像，建立了有瞬变电磁法特点的偏移成像方法。

# 第2章　瞬变电磁场的全域波场变换原理

所谓瞬变电磁场的波场变换是指，通过数学积分变换，将满足扩散方程的时域瞬变电磁场转换为满足波动方程的波场，然后借助于地震中发展起来的一些比较成熟的成像方法技术，求解被探查目标体的物性和几何参数。

## 2.1　瞬变电磁场与虚拟波场关系式的建立

Lee 于 1989 年在电性源基础上，建立了满足时域扩散方程的电场强度与虚拟波场的关系式，依据这一思路，本书从麦克斯韦方程出发，建立以大回线源为基础的时域瞬变响应与虚拟波场的对应关系。

在均匀各向同性导电介质中，大回线源以外的空间中，电磁场都满足麦克斯韦方程

$$\nabla\times \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.1}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = \sigma\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.2}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{2.3}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{2.4}$$

式中，$\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)$ 表示电场强度，$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)$ 表示磁场强度，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)$ 表示电位移矢量，且有

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = \mu\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon(\boldsymbol{r})\boldsymbol{E}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.6}$$

式中，$\mu$ 表示磁导率，$\varepsilon$ 表示介电常数。

对式（2.2）两端求旋度，并将式（2.5），式（2.6）代入，得

$$\nabla\times\nabla\times \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = -\sigma(\boldsymbol{r})\mu\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) + \mu\varepsilon(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.7}$$

式中，$\mu=\mu_0$ 为真空中的磁导率。

在导电介质中，如果忽略位移电流，则方程（2.7）可化简为

$$\nabla\times\nabla\times \boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) + \mu\sigma(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{2.8}$$

相应的初始和边界条件可写成

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},0)=0,\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}|_{\Gamma}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r}_0,t)\quad t>0$$

这里 $\Gamma$ 是体积 $V$ 在 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0$ 时的边界，引入函数 $\boldsymbol{U}$（$\boldsymbol{r}$，$\tau$）如下

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},\tau)+\mu\sigma(\boldsymbol{r})\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},\tau)=0 \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},0)=\frac{\partial}{\partial q}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},\tau)|_{\tau=0}=0$$

$$\boldsymbol{U}|_{\Gamma}=\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}_0,\tau),\tau>0$$

对比方程（2.8）和方程（2.9），就可清楚地看到自变量 $\tau$ 是时间平方根的量纲，函数 $\boldsymbol{U}$（$\boldsymbol{r}$，$\tau$）是以波速 $\frac{1}{\mu\sigma(\boldsymbol{r})}$ 传播的波场。分别对扩散方程（2.8）中的 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}$（$\boldsymbol{r}$，$\tau$）从 $t$ 到 $s$ 和波动方程（2.9）中的 $\boldsymbol{U}$（$\boldsymbol{r}$，$\tau$）从 $\tau$ 到 $p$ 进行 Laplace 变换，得

$$\begin{gathered}\nabla\times\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},s)+\mu\sigma(\boldsymbol{r})s\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},s)=0\\ \hat{\boldsymbol{H}}|_{\Gamma}=\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}_0,s),-\frac{\pi}{2}<\arg(s)<\frac{\pi}{2}\end{gathered} \tag{2.10}$$

式中，

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},s)=\int_0^{\infty}\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{r},t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

和

$$\begin{gathered}\nabla\times\nabla\times\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{r},p)+\mu\sigma(\boldsymbol{r})p^2\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{r},p)=0\\ \hat{\boldsymbol{U}}|_{\Gamma}=\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{r}_0,p);-\frac{\pi}{2}<\arg(p)<\frac{\pi}{2}\end{gathered} \tag{2.11}$$

其中，

$$\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{r},p)=\int_0^{\infty}\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r},\tau)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

如果令 $s=p^2$，则方程（2.10）变为

$$\begin{gathered}\nabla\times\nabla\times\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},p^2)+\mu\sigma(\boldsymbol{r})p^2\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},p^2)=0\\ \hat{\boldsymbol{H}}|_{\Gamma}=\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}_0,p^2),-\frac{\pi}{2}<\arg(p^2)<\frac{\pi}{2}\end{gathered} \tag{2.12}$$

将方程（2.11）与方程（2.12）两式相减，并取

$$\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},p)=\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},p^2)-\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{r},p)$$

且 $\hat{\boldsymbol{D}}$（$\boldsymbol{r}$，$p$）满足

$$\begin{gathered}\nabla\times\nabla\times\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},p)+\mu\sigma(\boldsymbol{r})p^2\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},p)=0\\ \hat{\boldsymbol{D}}|_{\Gamma}=0,-\frac{\pi}{4}<\arg(p)<\frac{\pi}{4}\end{gathered} \tag{2.13}$$

把 $\hat{\boldsymbol{D}}$（$\boldsymbol{r}$，$p$）的共轭函数 $\hat{\boldsymbol{D}}^*$（$\boldsymbol{r}$，$p$）乘以式（2.13）并在体积 $V$ 上做积分，得到

$$\int_V |\nabla\times\nabla\times\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},p)|^2\mathrm{d}V+\mu p^2\int_c\sigma(\boldsymbol{r})|\hat{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},p)|^2\mathrm{d}V=0$$

$$-\frac{\pi}{4}<\arg(p)<\frac{\pi}{4}$$

故只能有 $\hat{\boldsymbol{D}}$（$\boldsymbol{r}$，$p$）$=0$，即

$$\hat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},p^2)=\hat{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{r},p)$$

成立，去掉空间变量 $\boldsymbol{r}$，并写成标量形式

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}(t)\mathrm{e}^{-p^2t}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \boldsymbol{U}(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau$$

由于$-\frac{\pi}{2}<\arg$（$s$）$<\frac{\pi}{2}$，将 $s=p^2$ 代入上式，得

$$\int_0^\infty \boldsymbol{H}(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_0^\infty \boldsymbol{U}(\tau)\mathrm{e}^{-\sqrt{s}\tau}\mathrm{d}\tau$$

将此式从 $s$ 到 $\tau$ 进行 Laplace 反变换，得到如下波场变换。

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{m}}(t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\int_0^\infty \tau\mathrm{e}^{-\tau^2/4t}\boldsymbol{U}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.14}$$

这便是时域扩散场 $\boldsymbol{H}$（$\boldsymbol{r}$，$t$）与虚拟波场 $\boldsymbol{U}$（$\boldsymbol{r}$，$\tau$）之间的积分关系表达式。

## 2.2 波场反变换式的不适定性

### 2.2.1 反问题与第一类算子方程的不适定性

在上节中，式（2.14）给出了从波场到时域场的波场正变换式，这一变换过程称为正问题。如果反过来，已知时域场求波场，则称为反问题。波场正变换式（2.14）的逆变换是典型的第一类 Fredholm 型算子方程，其反问题有一个重要的特征，就是所谓的“不适定性”。“适定”和“不适定”的概念是 20 世纪初引入的。

设 $\rho_F$ 和 $\rho_U$ 分别是空间 $F$ 和 $U$ 的度量，算子 $A$：$F\to U$ 是从空间 $F$ 线性或非线性映射到 $U$。则式（2.14）中的反问题可写成如下的第一类算子的形式

$$Az=u\quad(z\in F,u\in U) \tag{2.15}$$

自然，其中的 $A$ 可为积分算子。为此我们做如下定义。

定义：称问题方程（2.15）为适定的，如果它同时满足下述三个条件

（1）$\forall u\in V$，都存在 $z\in F$ 满足方程（2.15）（解的存在性）；

（2）设 $u_1$，$u_2\in U$，若 $z_1$ 和 $z_2$ 分别是方程（2.15）对应于 $u_1\neq u_2$ 的解，则 $z_1\neq z_2$（解的唯一性）；

(3) 解相对于空间域（$F$，$U$）而言是稳定的（解的稳定性），即 $\forall \varepsilon>0$，存在 $\delta$（$\varepsilon$）$>0$，只要

$$\rho_{U(u_1,u_2)} < \delta(\varepsilon) \quad (u_1,u_2 \in U) \tag{2.16}$$

便有

$$\rho_{F(z_1,z_2)} < \varepsilon \quad (Az_1 = u_1, Az_2 = u_2) \tag{2.17}$$

反之，若上述三个条件中，至少有一个不能满足，则称其为不适定性。

由此，我们知道解的存在性与唯一性取决于空间（$F$，$U$）与算子 $A$ 的代数特征，即算子是否为满射，或是否为一对一映射（单射）；而稳定性则取决于空间的拓朴性质，即逆算子 $A^{-1}$是否连续。由此可见，问题的适定与不适定，不仅与算子 $A$ 及其定义域与值域有关，而且与相应空间的度量有关。

另外，上面的三个适定性条件具有深刻的实际意义。首先，对于实际问题而言，我们自然期望其解是存在且唯一的。更重要的是，实际获取的数据资料都是近似的，即我们实际处理的是近似数据，而不是“精确”数据。因为，“精确”数据往往是未知的，若原始数据的小的误差将导致近似解对于真解的严重偏离，则计算所得的数值结果将毫无意义。

可见，在处理地球物理问题时，算子 $A$ 的适定与否是非常重要的。如何判断一个算子的适定性，如下定理可以解决这一问题。

定理：设 $A$：$F \to U$ 为全连续算子（紧算子），$F$，$U$ 均为 Banach 空间。若 $A^{-1}$存在，则当 $F$，$U$ 之中一个是无穷维时，它必为无界算子，即它在 $U$ 上是不连续的。

由上述定理可知，具有全连续算子的第一类积分方程即使有解，也是不稳定的，再者，当它的值域非闭时（由于观测误差的存在常常导致数据资料越出该算子的值域），该方程无经典解。从而，第一类积分方程（包括 Fredholm 方程和 Volterra 方程）一般是不适定的。

### 2.2.2　波场变换方程的不适定性分析

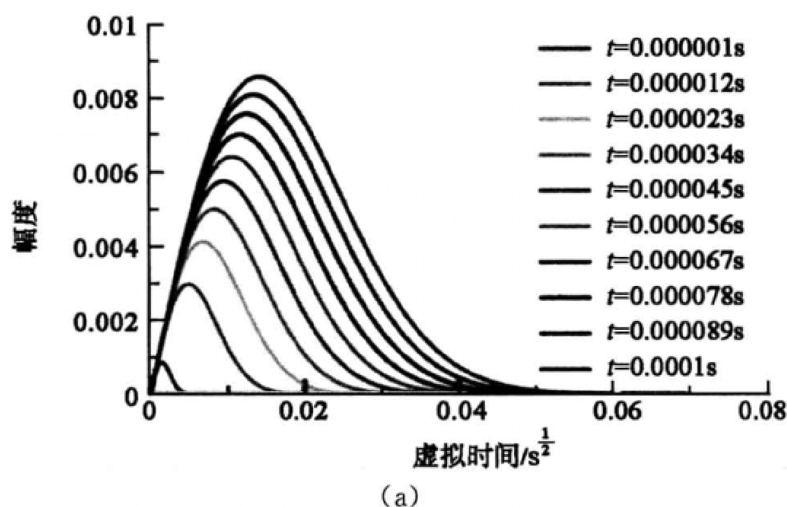
根据电磁场理论中的对偶原理，瞬变电磁场中的各个场量均满足式(2.14)的波场变换关系，为了不失一般性，取 $f$（$x$，$y$，$z$，$t$）代表瞬变电磁场的场分量，$u$（$x$，$y$，$z$，$\tau$）代表虚拟波场 $\boldsymbol{U}$（$\boldsymbol{r}$，$\tau$）某一分量，故式(2.14)的离散数值积分形式可写为

$$f(x,y,z,t_i) = \sum_{j=1}^{n} u(x,y,z,\tau_j)a(t_i,\tau_j)h_j \tag{2.18}$$

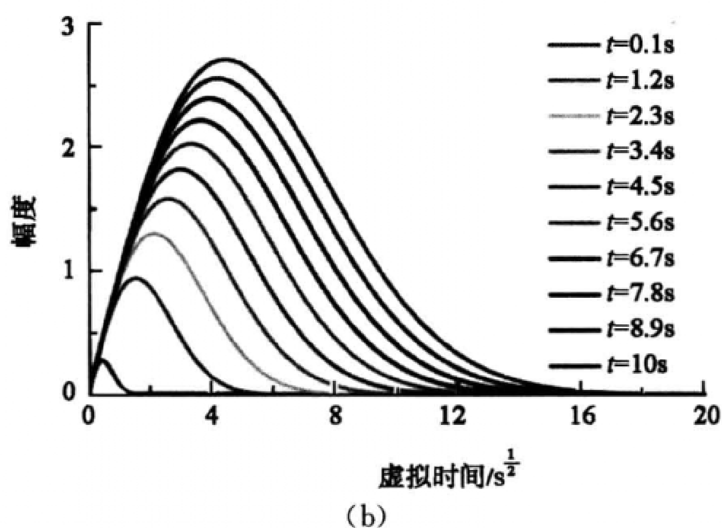
式中，$h_j$ 为积分系数，并且

$$a(t_i,\tau_j) = \tau_j \mathrm{e}^{-\frac{\tau_j^2}{4t_i}} \tag{2.19}$$

为核函数，是随着 $\tau$ 的增加达到某一极值后快速衰减到零的函数（图 2.1，见彩图），对于不同的时刻而言，核函数曲线的形态基本一致，但不同时间核函数的幅度和虚拟时间 $\tau$ 的动态范围很大，这就导致由核函数构成的系数矩阵的条件数会很大，不适定性非常严重，不利于波场反变换的计算。




(a)

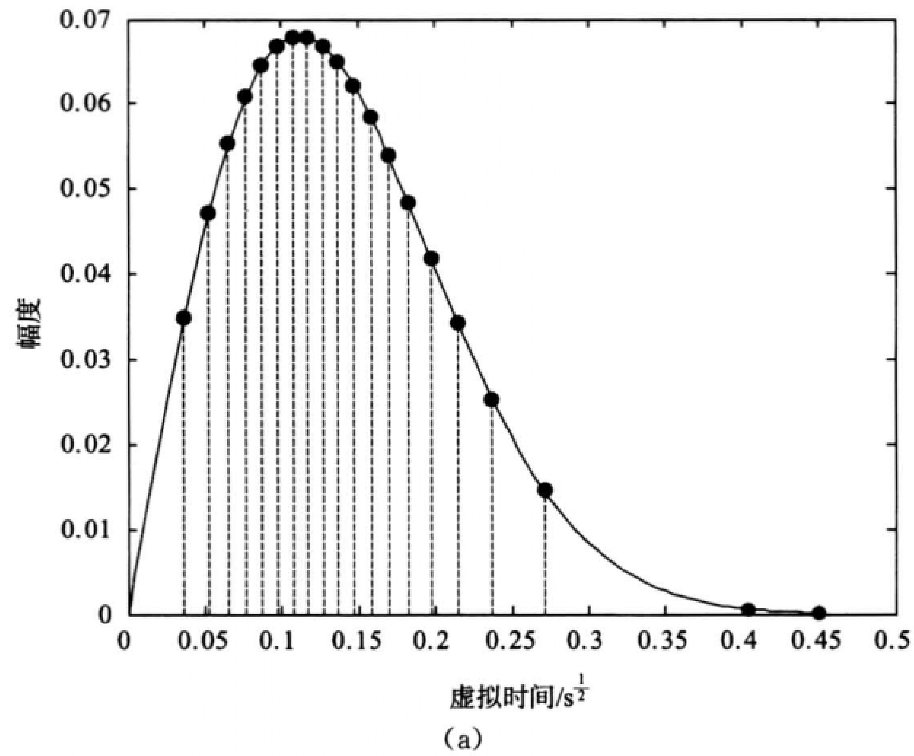



(b)

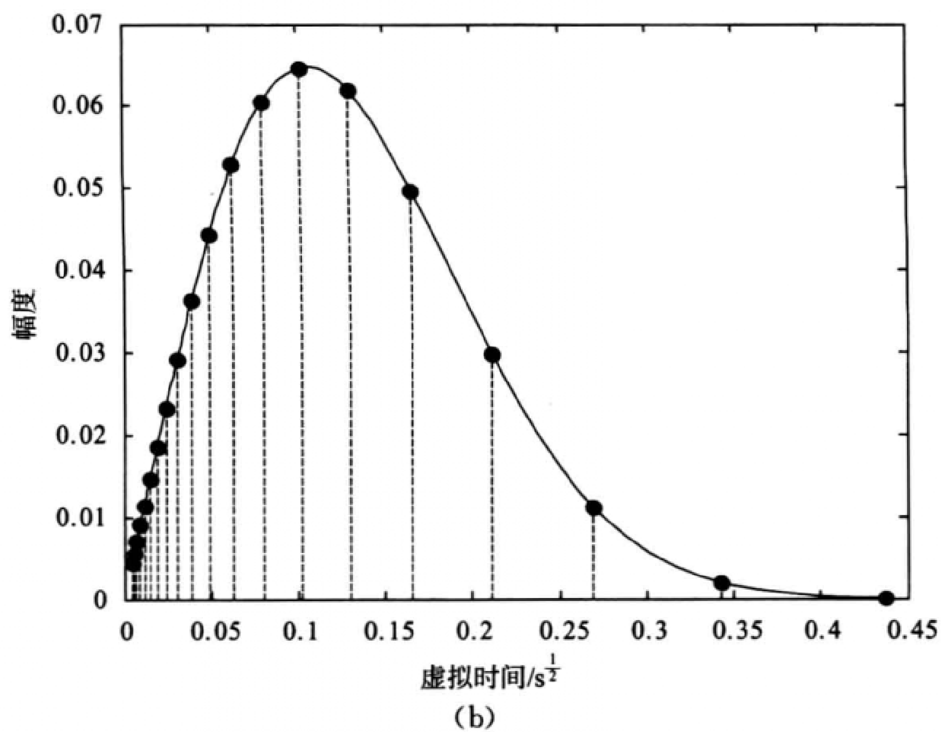
图 2.1　不同时间的核函数的展布图

(a) $t=1\sim100\mu s$ 核函数展布图；(b) $t=0.1\sim10s$ 核函数展布图

我们对比一些常规的离散方式，如等间距离散、对数等间距离散、等面积离散和高度等间距离散四种方式，不同离散方式的虚拟时间分布示意图如图 2.2 所示。根据不同离散方式选取虚拟时间，采用数值积分方法进行积分，比较各数值积分精度和离散后各矩阵条件数如表 2.1 所示。通过比较选取均方误差最小，形成系数矩阵条件数最好的是等间距离散。




(a)

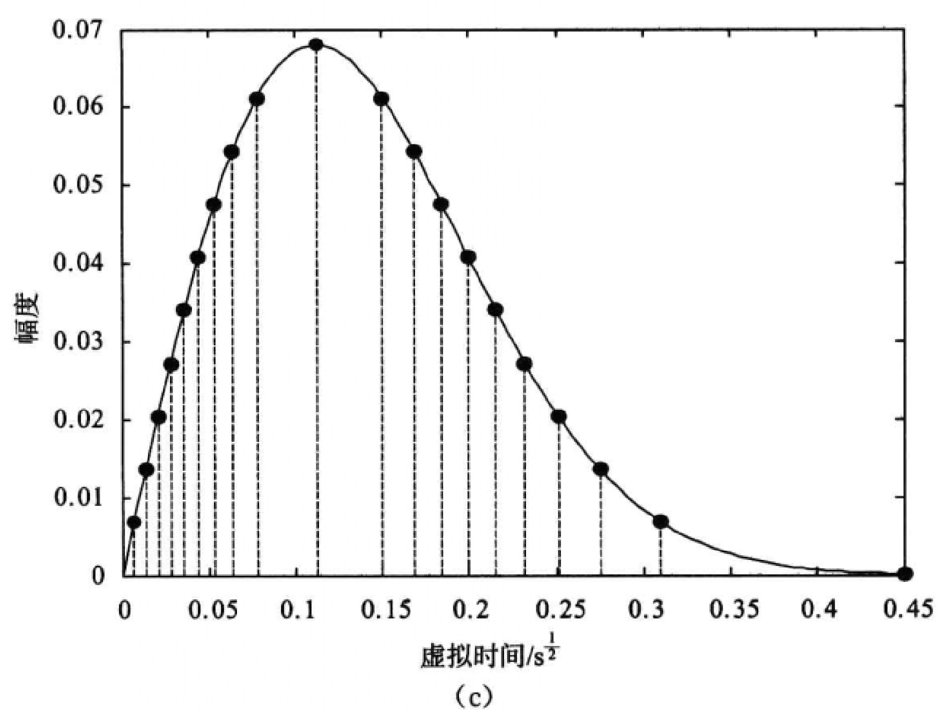



(b)

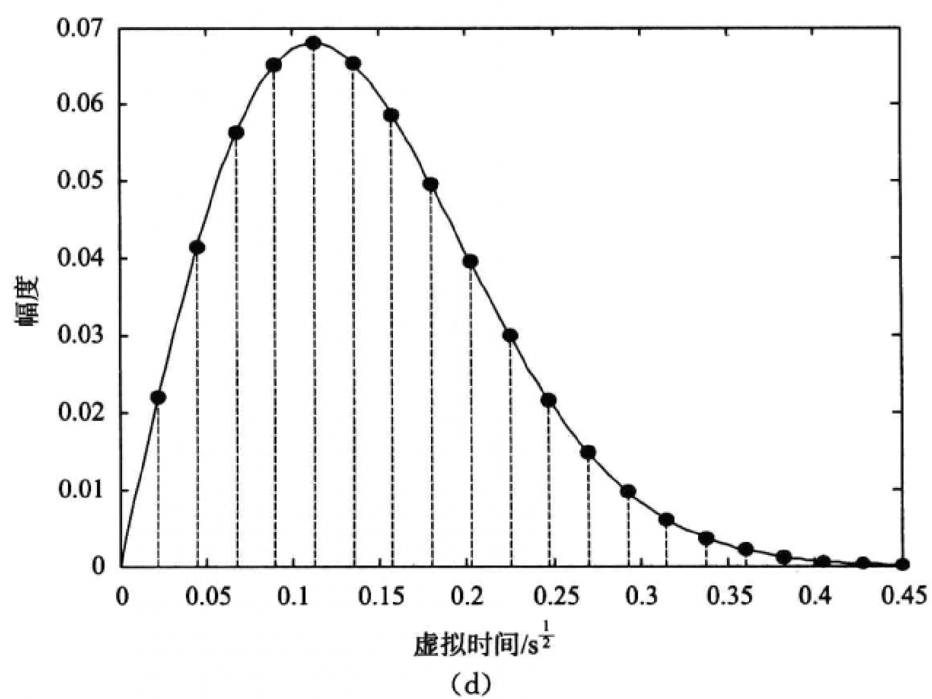
图 2.2　不同离散方式虚拟时间分布示意图

(a) 等面积离散；(b) 对数等间距离散；

(c) 高度等间距离散；(d) 线性等间距离散




(c)




(d)

图 2.2　不同离散方式虚拟时间分布示意图（续）

表 2.1　不同离散方式比较

| 离散方式 | 均方误差/% | 系数矩阵条件数 cond (A) |
|---|---|---|
| 线性等间距 | 2.53 | $7.58\times10^{18}$ |
| 对数等间距 | 4.92 | $1.05\times10^{19}$ |
| 等面积离散 | 6.94 | $3.25\times10^{20}$ |
| 等高度离散 | 8.74 | $1.53\times10^{19}$ |

## 2.3　波场变换的数值化方法

由 2.2.1 小节知，式（2.14）的一般表达式可写为

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\int_0^{\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}u(x,y,z,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2.20}$$

如果已知瞬变电磁场值 $f$（$x$，$y$，$z$，$t$）通过对式（2.20）进行逆变换，就可求得“波场”值 $u$（$x$，$y$，$z$，$\tau$）。但这一逆变换过程在数学上归结为第一类算子方程问题，它的数学特征是不适定的，将其离散化后得到的线性代数方程组常常是病态的，而且随着方程组阶数的增加，病态情况更加严重。因此，要求得稳定、可靠的“波场”值必须在采用正则化算法的同时，还要控制方程组的阶数。

### 2.3.1　数值化方法

波场变换式（2.20）的离散数值积分形式可写为

$$f(x,y,z,t_i)=\sum_{j=1}^{n}u(x,y,z,\tau_j)a(t_i,\tau_j)h_j \tag{2.21}$$

式中，

$$a(t_i,\tau_j)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t_i^3}}\tau_j e^{-\frac{\tau_j^2}{4t_i}} \tag{2.22}$$

称为核函数，$h_j$ 为积分系数，由于核函数 $a$（$t_i$，$\tau_j$）是随 $\tau$ 的增加达到某一极值后快速衰减的函数，而波场值 $u$（$x$，$y$，$z$，$\tau$）一般为变化幅度不大的连续函数，对数值积分计算结果影响不大，因此，精确计算式（2.21）的关键是求得一组 $h_j$，$\tau_j$（$j=1$，2，…，$n$），使其最大限度地满足式（2.21）。为此，考虑一种特殊情况。

令 $u$（$x$，$y$，$z$，$\tau$）$=1$，故式（2.20）变为

$$f(x,y,z,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\int_0^{\infty}\tau e^{-\frac{\tau^2}{4t}}\mathrm{d}\tau \tag{2.23}$$

利用如下特殊积分

$$\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-ax^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}$$

式（2.23）可变为

$$f(x,y,z,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}\int_0^{\infty} \tau \mathrm{e}^{-\frac{\tau^2}{4t}}\mathrm{d}\tau \tag{2.24}$$

对式（2.24）进行数值积分，其离散表达式为

$$f(x,y,z,t_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi t_i}} = \sum_{j=1}^{n} a(t_i,\tau_j)h_j \tag{2.25}$$

对式（2.25）用最优化法可以选择出一组，$\tau_j$，$h_j$（$j=1$，2，…，$n$）值，然后将这组值用到式（2.20）中，对于不同的 $t_i$（$i=1$，2，…，$m$），便可求出一系列的瞬变电磁场值 $f$（$x$，$y$，$z$，$t_i$），$i=1$，2，…，$m$。

### 2.3.2 最优化方法

取瞬变电磁场的采样时间门数为 $m$，波场变换的积分系数个数为 $n$，为了保证波场变换式的系数矩阵满秩，取 $m \geqslant n$。

我们的目的就是要利用最优化法选择出一组 $\tau_j$ 和 $h_j$（$j=1$，2，…，$n$）值，最好地满足式（2.25），对于不同的 $t_i$（$i=1$，2，…，$m$），取 $m \geqslant n$，可得

$$a_{ij}h_j = f_i \quad (i = 1,2,\cdots,m;j = 1,2,\cdots,n) \tag{2.26}$$

式中，

$$a_{ij} = \frac{1}{2\sqrt{\pi t_i^3}}\tau_j \mathrm{e}^{-\frac{\tau_j^2}{4t_i}};f_i = \frac{1}{\sqrt{\pi t_i}} \tag{2.27}$$

写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F} \tag{2.28}$$

式中，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}]_{m\times n}$，为系数矩阵；$\boldsymbol{F}=[f_i]_m$ 为已知瞬变场值向量；$\boldsymbol{H}=[h_j]_n$ 为积分系数向量。

选取 $\tau_j$ 和 $h_j$ 使目标函数

$$\varphi = \|\boldsymbol{F}-\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H}\|^2 \tag{2.29}$$

取极小。

$\tau_j$ 和 $h_j$ 的选取可分为两步：

第一步，给定一组 $\tau_j$（$j=1$，2，…，$n$），于是 $a_{ij}$ 为已知，由 $\varphi$ 的极小决定一组 $h_j$（$j=1$，2，…，$n$）。由于 $h_j$ 是线性地满足目标函数 $\varphi$ 的，故式（2.29）取极小的充要条件是 $\boldsymbol{H}$ 满足方程组

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{H} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{F} \tag{2.30}$$

解该方程组，便可求出在给定 $\tau_j$ 条件下，使目标函数 $\varphi$ 取极小的一组 $h_j$

($j=1, 2, \cdots, n$) 值。

第二步，研究在求得一组 $h_j$ ($j=1, 2, \cdots, n$) 值后，如何获得一组 $\tau_j$ ($j=1, 2, \cdots, n$) 使目标函数 $\varphi$ 取极小。设

$$V_i = a_{ij}h_j \tag{2.31}$$

写成矩阵形式

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{H} \tag{2.32}$$

为此，将 $\boldsymbol{V}$ 在一组初始的 $\tau_j^{(0)}$ ($j=1, 2, \cdots, n$) 处展成 Taylor 级数，并取 $\delta\tau_j$ 的一次项

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\delta\boldsymbol{\tau} \tag{2.33}$$

式中，

$$\boldsymbol{V}_0 = (V_i^{(0)})_m, \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \left[\frac{\partial V_i}{\partial \tau_j}\right]_{m\times n}, \delta\boldsymbol{\tau} = [\delta\tau_j]_n$$

$V_i^{(0)}$ 是一组初始 $\tau_j^{(0)}$ ($i=1, 2, \cdots, n$) 时的 $V_i$ 值，$\delta\tau_j$ 是 $\tau_j$ 的微小增量，将式 (2.33) 代入目标函数 $\varphi$ 中

$$\varphi = \left\| \boldsymbol{F} - \boldsymbol{V}^{(0)} - \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\delta\boldsymbol{\tau} \right\|^2 \tag{2.34}$$

此时的目标函数 $\varphi$ 是关于 $\delta\boldsymbol{\tau}$ 的函数，由 $\varphi$ 的极小可决定 $\delta\boldsymbol{\tau}$，故有

$$(\boldsymbol{B} + \alpha\boldsymbol{I}) \cdot \delta\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{C} \tag{2.35}$$

成立，式中

$$\boldsymbol{B} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right), \boldsymbol{C} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial \boldsymbol{\tau}}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F} - \boldsymbol{V}^{(0)})$$

$\alpha$ 为阻尼系数，$I$ 为单位矩阵。从式 (2.35) 中解出 $\delta\boldsymbol{\tau}$，于是得到一组新的 $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}^{(0)} + \delta\boldsymbol{\tau} \tag{2.36}$$

再以 $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ 作为新的初值，将 $\boldsymbol{V}$ 在 $\boldsymbol{\tau}^{(1)}$ 附近展开成 Taylor 级数，重复上述过程，可得 $\boldsymbol{\tau}$ 的二次估计值 $\boldsymbol{\tau}^{(2)}$，如此往复直至得到最佳的 $\boldsymbol{\tau}$ 值。

## 2.4　波场逆变换的预条件共轭梯度正则化算法

在前述的波场正变换中，应用两次最优化法，可以在保证计算精度的前提下最大限度地减少积分系数和离散采样点个数，也就减少了方程组的阶数，改善其不适定性。考虑到波场变换离散形式方程 (2.21) 中的系数矩阵条件数较大，单纯的正则化共轭梯度法或者预条件共轭梯度法，都不能很好地解决问题。因此，将两种方法相结合形成预条件正则化共轭梯度法。将式 (2.21) 写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{F} \tag{2.37}$$

式中，$\boldsymbol{A}=[a_{ij}h_j]_{m\times n}$，$\boldsymbol{U}=[u_j]_{n\times 1}$为虚拟子波，$\boldsymbol{F}=[f_i]_{m\times 1}$为接收的瞬变场时间信号。

为了利用共轭梯度迭代，将式（2.37）转化为

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AU}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{2.38}$$

只要$\boldsymbol{A}$是列满秩矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$就是对称正定矩阵，因此可以利用共轭梯度法。但是$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$的条件数较$\boldsymbol{A}$的条件数更大，使方程的病态更加严重。为了进一步降低矩阵的条件数，改善方程的病态程度，在进行正则化共轭梯度之前，对系数矩阵进行预条件。对于预条件矩阵的构造采用超松弛预条件法，这是因为对称超松弛预条件是一种较为有效的预条件方法，不仅预条件因子容易求得，而且能有效降低矩阵的条件数。

设矩阵

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}+\alpha\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D} \tag{2.39}$$

可分解为

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{M}-\boldsymbol{N} \tag{2.40}$$

式中，

$$\boldsymbol{M}=\frac{1}{\omega(2-\omega)}[(\boldsymbol{K}+\alpha\boldsymbol{C}_l)^{-1}\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{K}+\alpha\boldsymbol{C}_u)] \tag{2.41}$$

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{\omega(2-\omega)}[((1-\omega)\boldsymbol{K}+\alpha\boldsymbol{C}_l)^{-1}\boldsymbol{K}^{-1}((1-\omega)\boldsymbol{K}+\alpha\boldsymbol{C}_u)] \tag{2.42}$$

式中，$\boldsymbol{K}$、$\boldsymbol{C}_l$和$\boldsymbol{C}_u$分别为$\boldsymbol{S}$的对角元、下三角元和上三角元，$\omega$为（0，2）内的参数。于是我们可以选择如下的预条件矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{K}+\alpha\boldsymbol{C}_l)^{-1}\boldsymbol{K}^{-1}(\boldsymbol{K}+\alpha\boldsymbol{C}_u) \tag{2.43}$$

数学上已经证明经过超松预条件后，矩阵条件数降为原来的平方根。

假设根据矩阵$\boldsymbol{A}(v)$构造的预条件因子为$\boldsymbol{M}(v)$，构造新的方程如式（2.41）所示，矩阵$\boldsymbol{M}(v)^{-1}\boldsymbol{A}(v)$接近单位阵，因此迭代很快收敛。具体计算过程如图2.3所示，其中$k_{\max}$为外层循环最大迭代次数，$\varepsilon$为正则化共轭梯度法迭代终止条件，$l_{\max}$为内层循环最大的迭代次数，$\xi$为内层共轭梯度迭代终止条件，$v$为选定的正则化参数。

$$\boldsymbol{M}(v)^{-1}\boldsymbol{A}(v)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{M}(v)^{-1}(v\boldsymbol{x}^k+\boldsymbol{F}) \tag{2.44}$$

式中，$\boldsymbol{x}^k$为第$k$次迭代的$\boldsymbol{x}$值；$\boldsymbol{x}$的初值$\boldsymbol{x}^{(0)}$选为单位向量；$\boldsymbol{A}(v)=v\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$。

正则化参数$v$的选择非常重要，正则化参数$v(\delta)$使$\boldsymbol{U}$在近似性与稳定性之间进行优化选择。Zhdanov等（1988）提出正则化因子不断递减的自适应算法。并与$L$曲线法做了比较，认为采用自适应算法所得反演结果不逊于$L$曲

线法所得，由于 $L$ 曲线法需要通过多次反演计算来确定最佳的正则化因子，计算量将成倍增长，而自适应算法只需在每次迭代前确定参与当次反演的正则化因子，因此可以大大减少计算时间。王彦飞（2007）依据偏差原理提出了重开始共轭梯度法（RSCG）计算最佳正则化因子，并与 CGNR 和 CGER 方法进行比较，认为 RSCG 方法更加稳定。

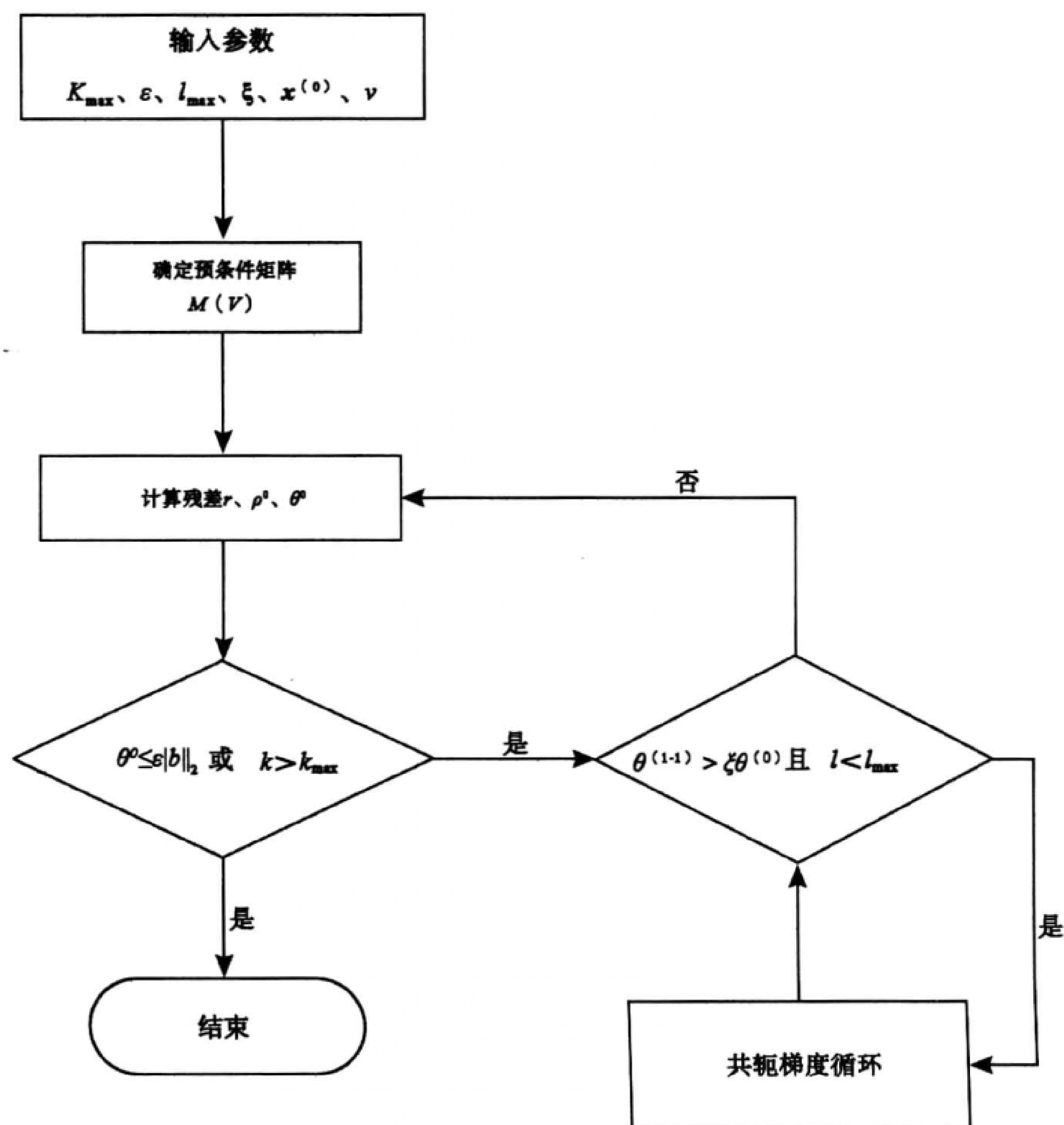



图 2.3　预条件正则化共轭梯度法计算框图

依照王彦飞（2007）重开始共轭梯度（RSCG）计算方法，根据部分先验信息来选择最优的正则化参数值。正则化因子 $v$ 为一渐变的量，其初始值 $v_0$ 为数据拟合泛函与稳定泛函的比值，在前期大量模拟计算的基础上基本可以确定正则化参数的初值，根据经验可以取 $v_0$ 等于 0.00005 为分段最大的正则化因子。在此后的迭代过程中，如果数据拟合残差随迭代次数逐渐变小，正则化

因子可保持不变，否则按照式（2.45）进行选择

$$v = v_0 \xi^k, \quad k = 0, 1, \cdots \tag{2.45}$$

式中，$\xi > 1$ 为经验系数，$k$ 表示预条件正则化共轭梯度（PRCG）的迭代过程中第 $k$ 次迭代。

在完成积分离散以及正则化参数选择后，对方程（2.21）运用预条件正则化共轭梯度法进行求解计算。取波场理论值为 $u$（$x$，$y$，$z$，$\tau$）$=1$，这时方程为一个简单积分，求得函数值 $f$（$x$，$y$，$z$，$t$）$=1/\sqrt{\pi t}$。正则化参数结果如表 2.2 所示，为适用时间区间［0.000078，0.006280］的正则化参数。利用（PRCG）法求得反变换结果如图 2.4 所示，最大误差小于 2%，可知文中所述方法满足要求。

**表 2.2　正则化参数估计结果**

| 正则参数（v） | 迭代步数 | 均方差 |
|---|---|---|
| 0.0011285 | 308226 | 2.006% |

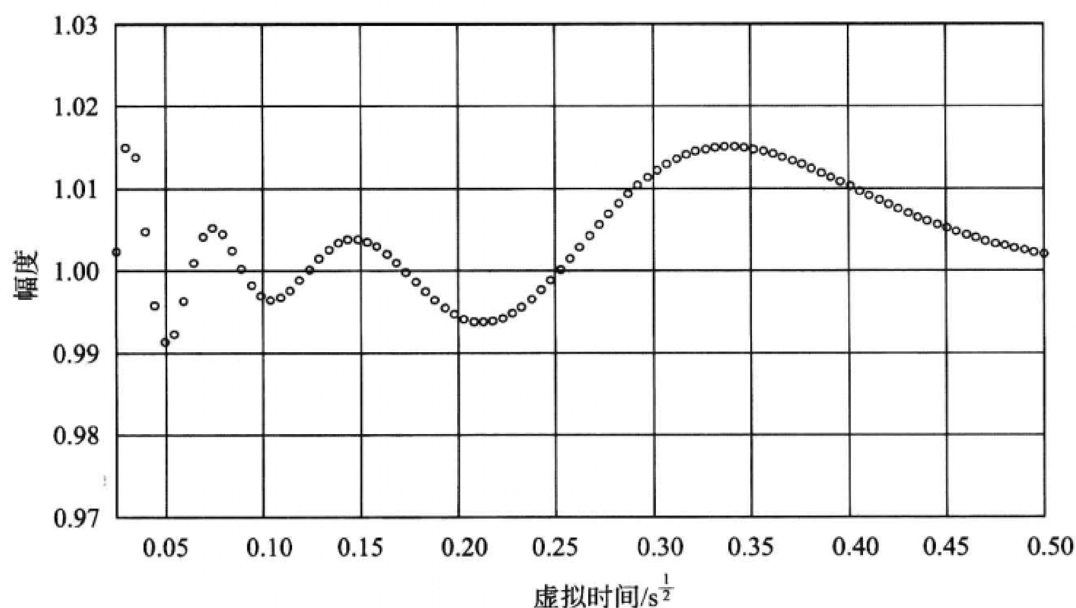



图 2.4　波场反变换结果

# 第 3 章　瞬变电磁虚拟波场的波场特性分析

我们知道，瞬变场满足的电磁扩散方程主要刻画电磁涡流场的感应扩散特征，体积效应较强，因此，基于扩散方程的偏移成像方法一般对电性界面的分辨能力较差。理论研究表明，将瞬变场转换成虚拟波场，就是把电磁响应中与传播有关的特征提取出来，而把电磁波传播过程中与频散、衰减有关的特性进行压制或去除。大量的理论计算和实验表明，这种变换得到的虚拟波场，不仅满足波动方程，而且还类似于地震子波一样，具有传播、反射、透射特征。

利用波场变换方法分别对两层模型和三层模型响应进行波场变换分析，给定不同的虚拟时间和子波宽度，总结虚拟波场的反射、透射、吸收衰减等传播规律。这对研究虚拟波场对电性界面和电阻率差异等的最小分辨率具有重要意义。

## 3.1　两层模型分析

根据特殊子波 $u(x, y, z, \tau)=1$ 可以确定正则化参数的合理范围。选择正则化参数后，以高斯脉冲为子波合成虚拟波场记录，对地电模型进行模拟。

### 3.1.1　单正峰波场记录模型

以高斯脉冲为子波合成波场记录，如图 3.1（a）所示。正变换后模型衰减曲线如图 3.1（b）所示，图中虚线为特殊子波 $u(\tau)=1$ 时的衰减曲线。叠加子波的积分函数如图 3.1（c）所示。衰减曲线形态与 D 型模型正演的衰减曲线变化规律一致，可假设单峰记录为 D 型地电模型波场函数。分析可知，脉冲峰值时刻对应着电性变化的分界面，高斯脉冲的宽度对应着电阻率差异，幅值符号对应地电模型的高低电阻率相对变化。按照第 2 章所述方法选择最优正则化参数后，进行波场反变换。

给出系列的单峰虚拟合成记录。固定子波宽度（$W_1$）和幅值（$A_1$），改变峰值出现时刻（$T_1$），范围为 $0.02 \sim 0.1\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}$。对给定模型记录进行反演拟合，采样时间为 $10\mu\mathrm{s} \sim 10\mathrm{ms}$，虚拟时间范围为 $0.005 \sim 0.5\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}$，离散点数为 $M=N=101$，最优正则化参数为 0.003。反演结果如图 3.2 所示，图中实线为合成

模型记录$U'$（$\tau$），空虚线为反演拟合结果$U$（$\tau$）。

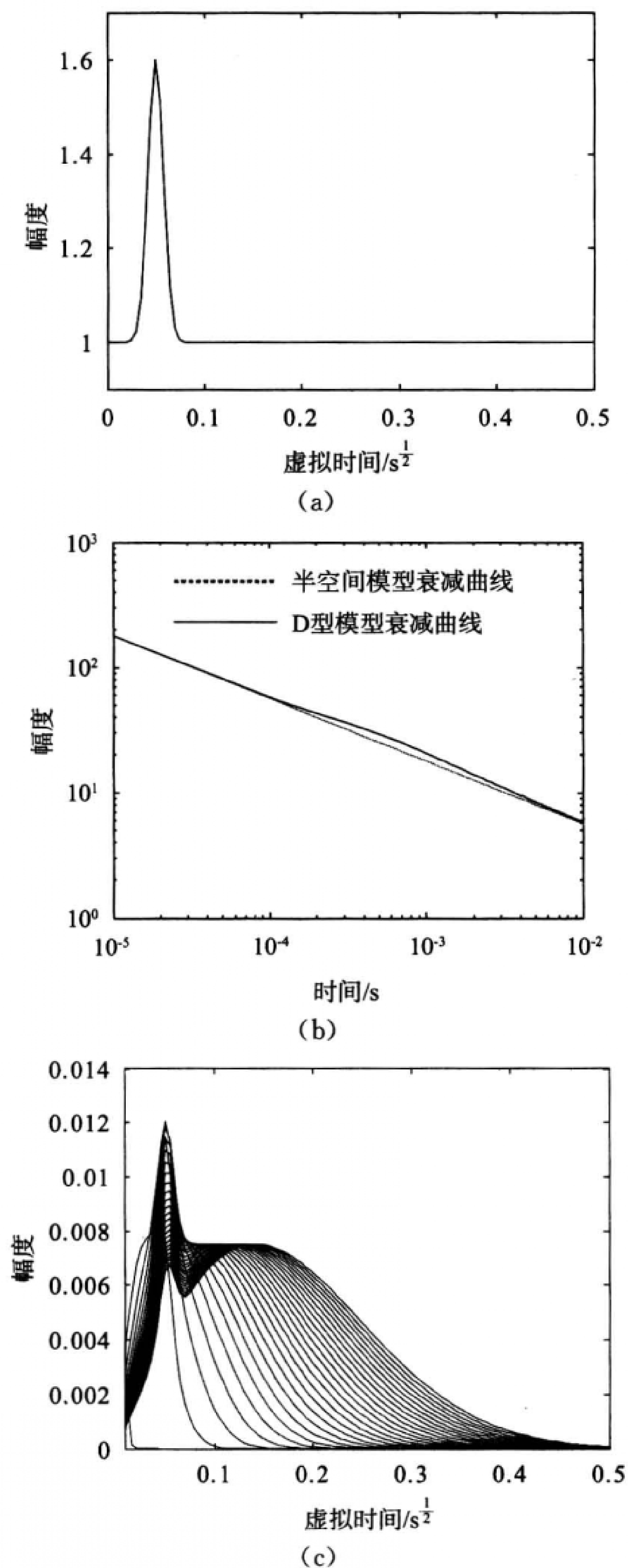
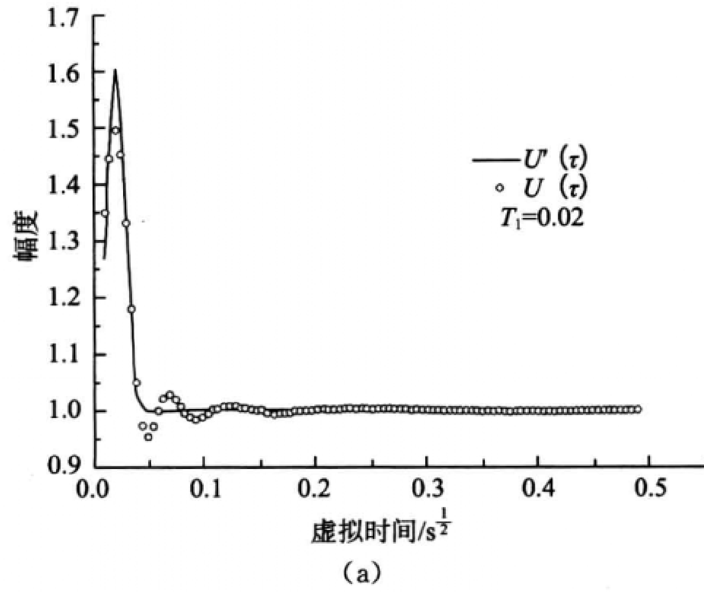
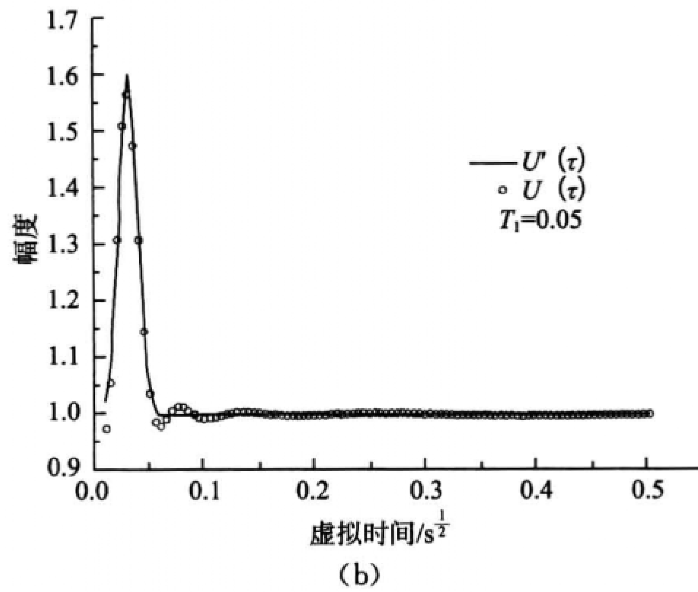



图 3.1　利用子波合成 D 型模型波场记录

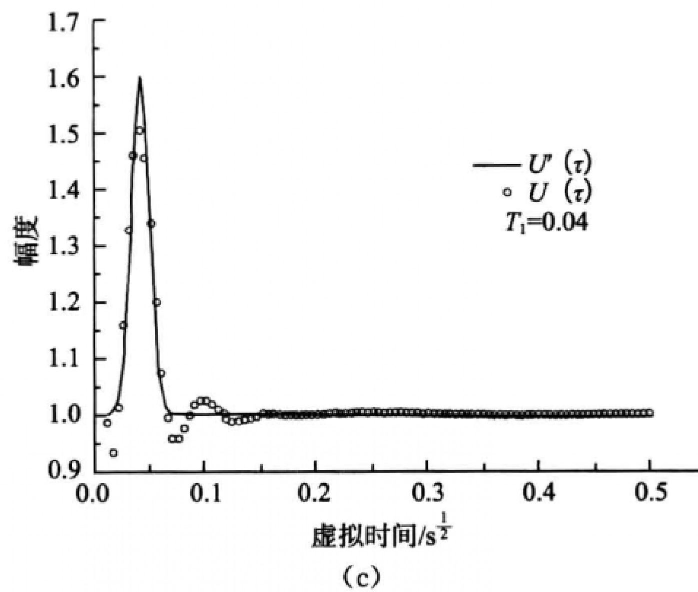
(a) 虚拟波场记录；(b) 等效模型衰减曲线；(c) 不同采样时刻叠加子波的核函数




(a)

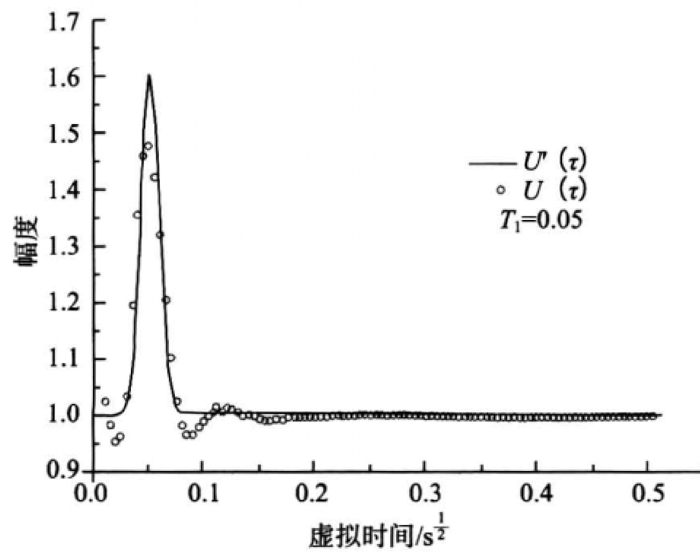



(b)

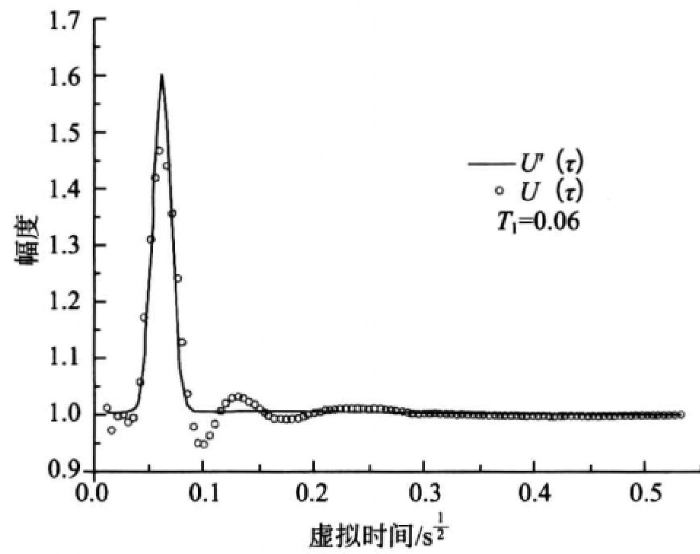



(c)

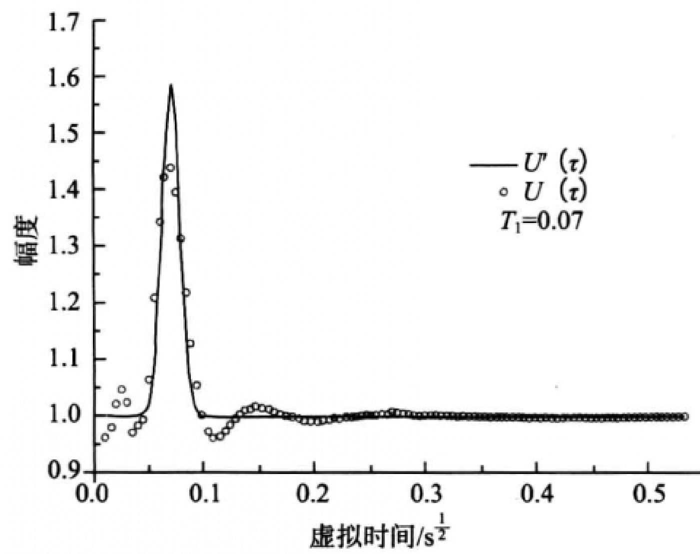
图 3.2　不同虚拟时间 D 型模型波场变换结果图




(d)

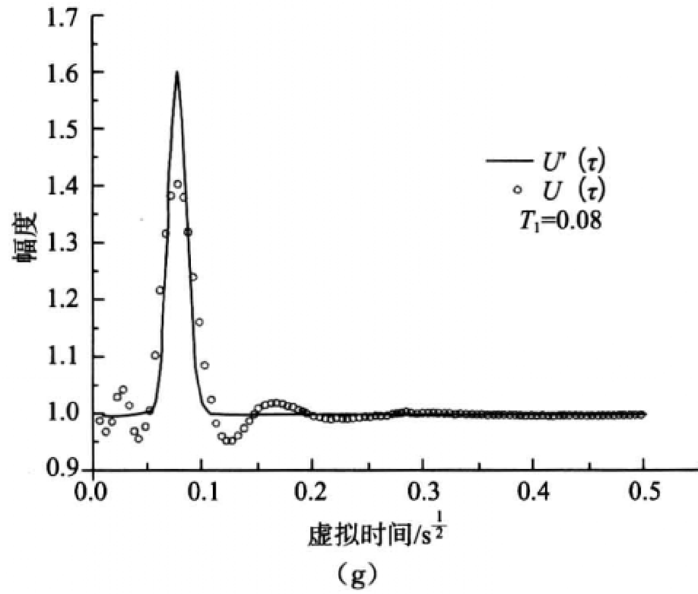



(e)

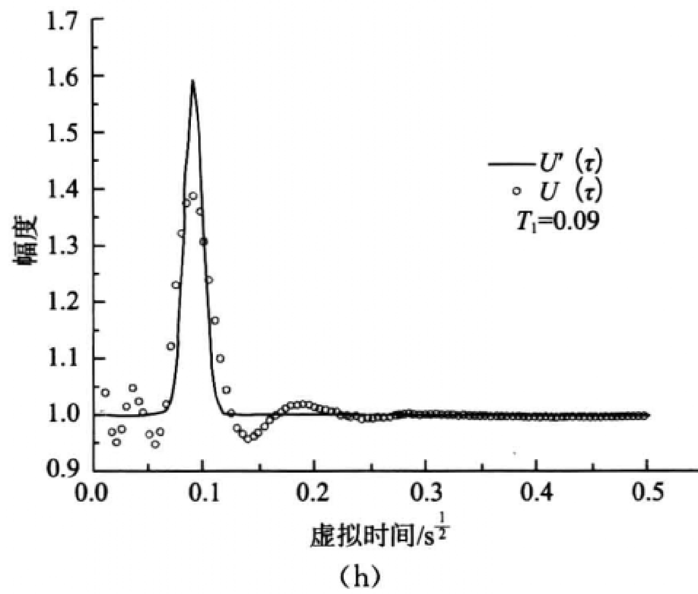



(f)

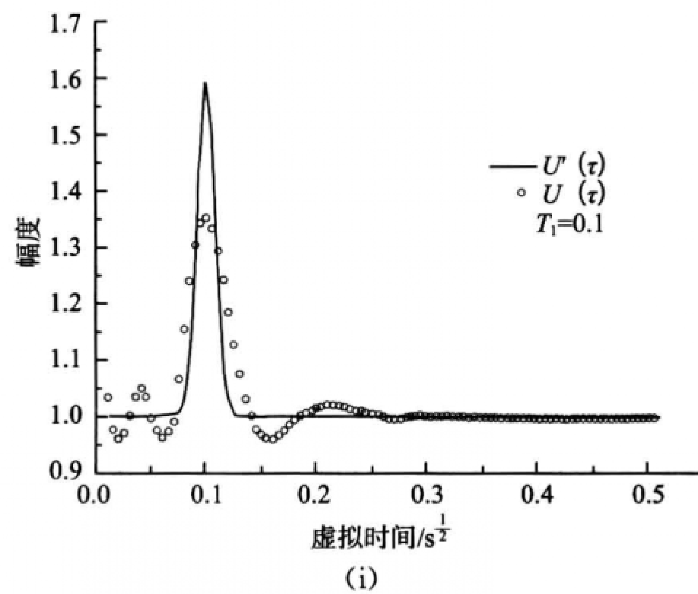
图 3.2 不同虚拟时间 D 型模型波场变换结果图（续）




(g)




(h)




(i)

图 3.2　不同虚拟时间 D 型模型波场变换结果图（续）

由图 3.2 可知，随着峰值时间的推迟，反演子波幅值逐渐降低，且子波宽度略有展宽。统计计算结果，如表 3.1 所示，随着虚拟时间向后延续，反演误差逐渐增大，误差变化如图 3.3 所示。这与电磁波在有耗介质中的传播规律基本相符，也是由此原因，使得瞬变电磁的分辨率有所降低。

**表 3.1　不同虚拟时间模型迭代反演次数和方差表**

| 序号 | 峰值时间/$s^{\frac{1}{2}}$ | 子波幅值 | 子波宽度 | 迭代次数 | 均方差/% |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.02 | 0.6 | 0.04 | 66941 | 0.83 |
| b | 0.03 | 0.6 | 0.04 | 66203 | 0.54 |
| c | 0.04 | 0.6 | 0.04 | 60065 | 0.96 |
| d | 0.05 | 0.6 | 0.04 | 61031 | 1.22 |
| e | 0.06 | 0.6 | 0.04 | 63133 | 1.38 |
| f | 0.07 | 0.6 | 0.04 | 63692 | 1.7 |
| g | 0.08 | 0.6 | 0.04 | 60975 | 1.91 |
| h | 0.09 | 0.6 | 0.04 | 57203 | 2.03 |
| i | 0.10 | 0.6 | 0.04 | 61172 | 2.41 |

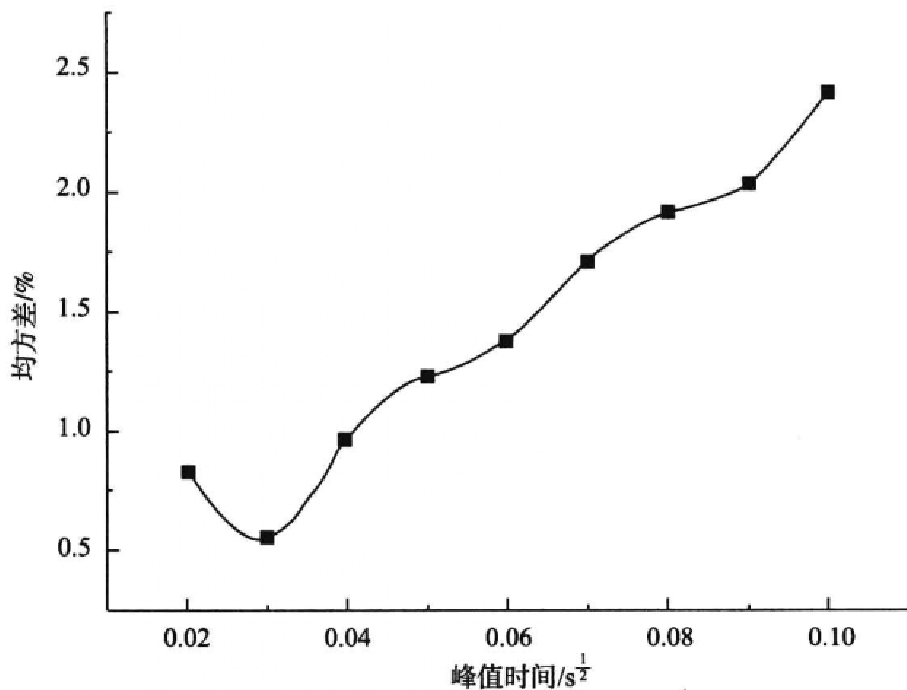



图 3.3　均方误差随峰值出现时间变化曲线

固定子波峰值出现时间，改变子波宽度，对模型进行反演拟合，反演结果如图 3.4 所示，图中实线为合成的波场记录，小圆圈为反演拟合结果，采样间隔与虚拟时间间隔不变。

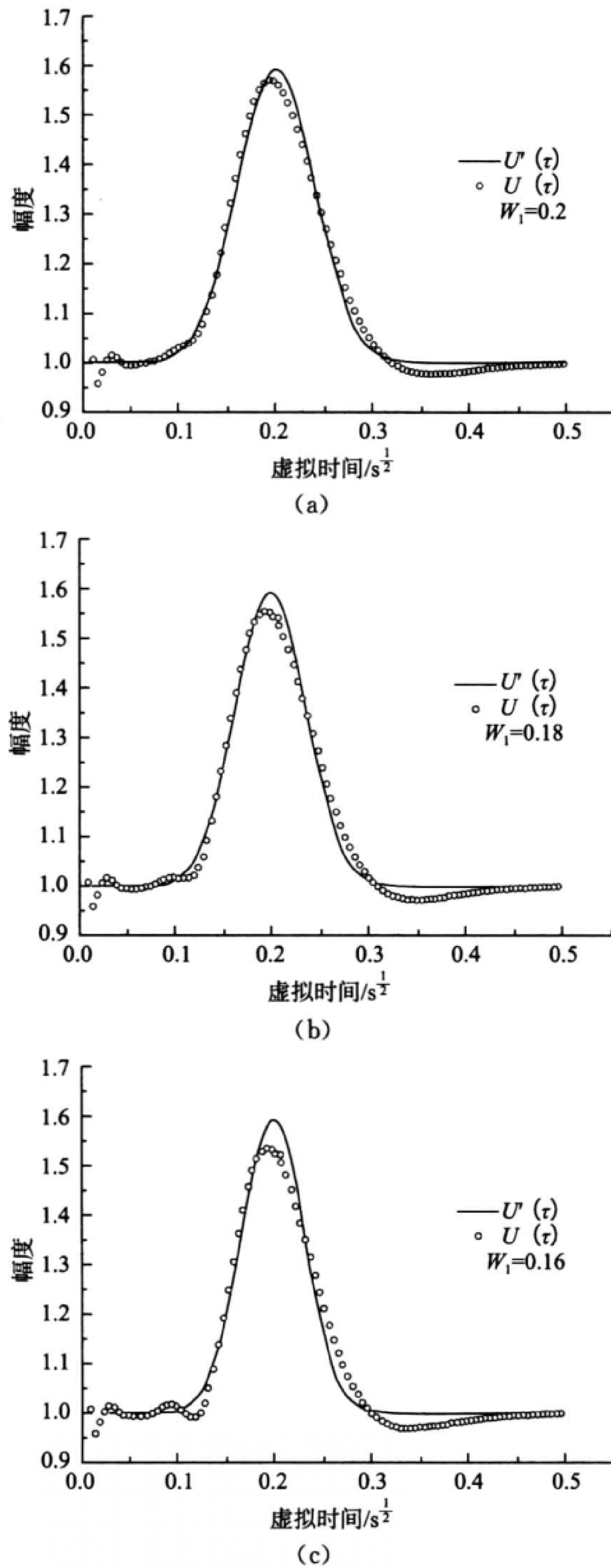
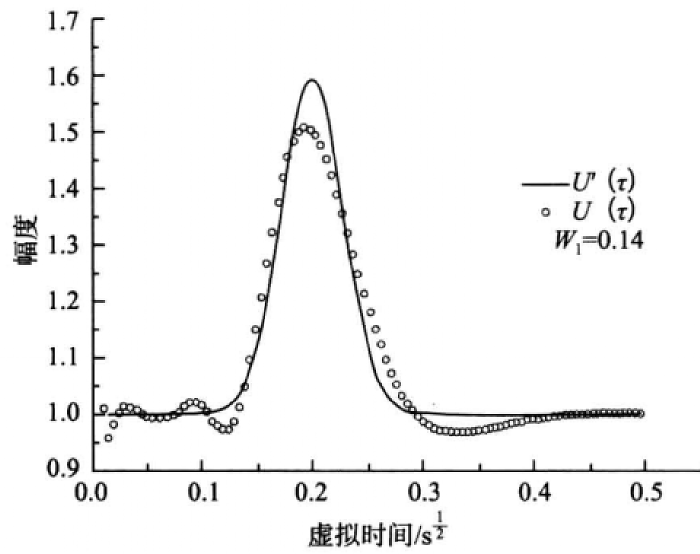
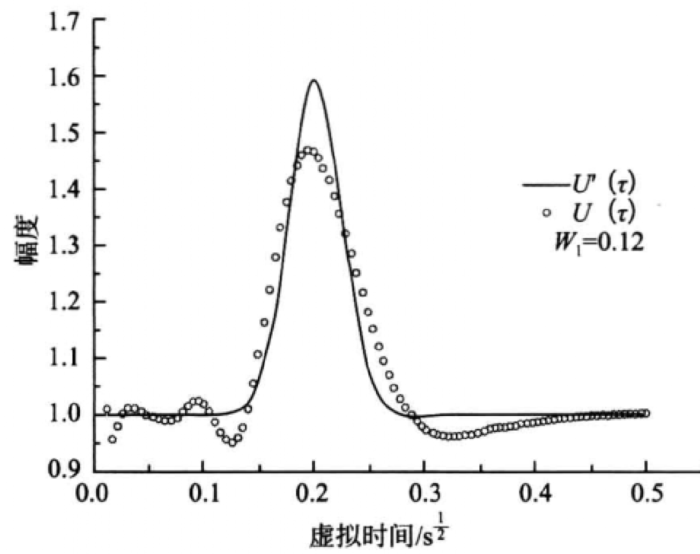


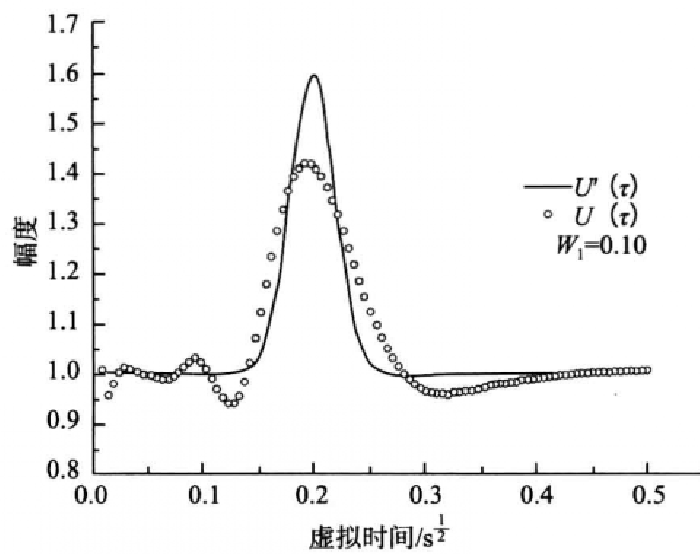

图 3.4　固定模型峰值时间改变子波宽度的反演拟合图




(d)

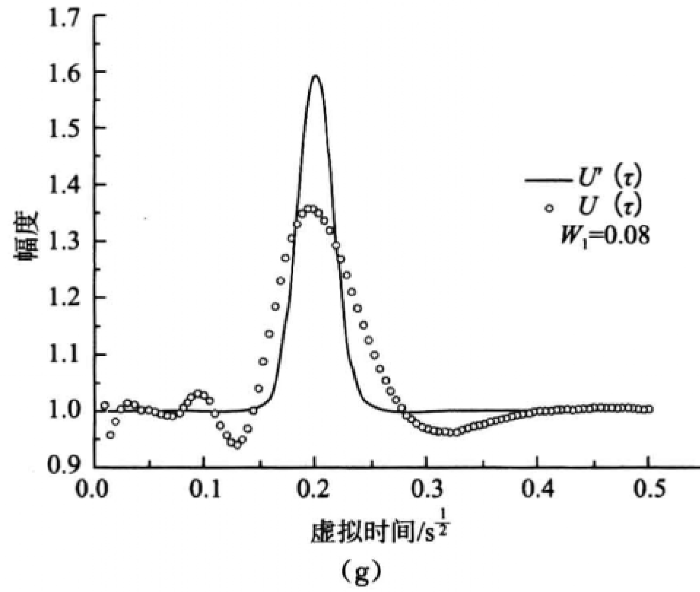



(e)

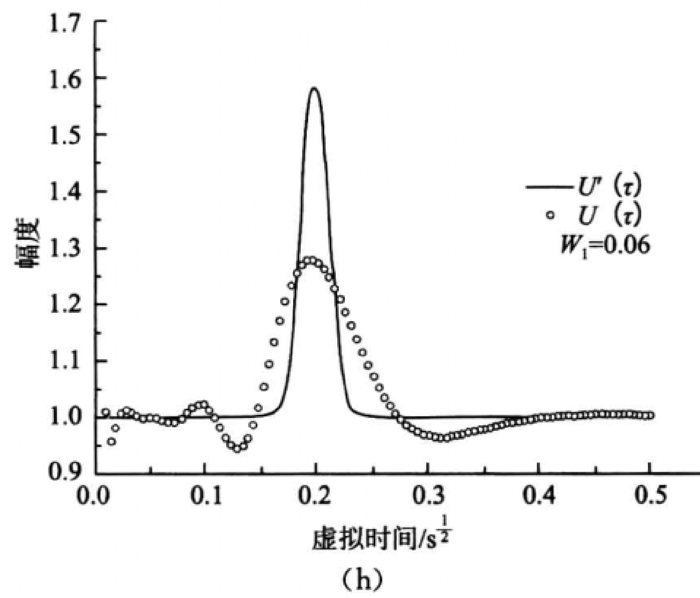



(f)

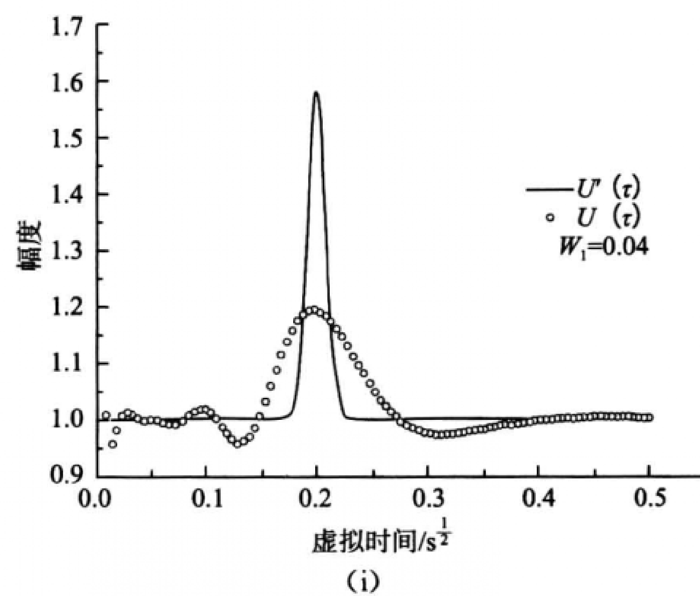
图 3.4　固定模型峰值时间改变子波宽度的反演拟合图（续）




(g)

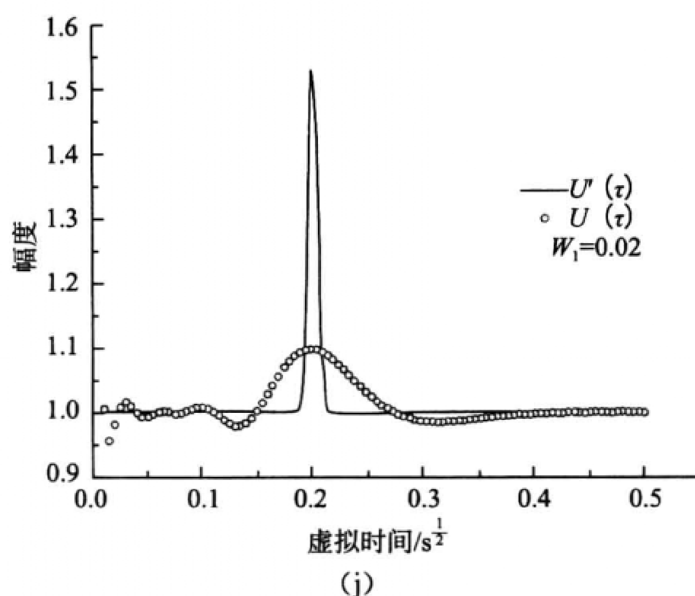



(h)




(i)

图 3.4　固定模型峰值时间改变子波宽度的反演拟合图（续）



(j)

图 3.4　固定模型峰值时间改变子波宽度的反演拟合图（续）

分析模型的反演结果，统计参数如表 3.2 所示。由图 3.4 可知在相同深度下，随着虚拟子波宽度逐渐变窄，反演拟合的振幅与模型振幅差距逐渐增大，反演误差增大，当子波宽度很窄时（电阻率差异不大）反演拟合数据与模型差异加大，因此，不能分辨该宽度的子波。拟合误差与子波宽度之间的关系如图 3.5 所示，当子波宽度很小时，拟合误差反而变小但是拟合曲线旁瓣与主幅值差距不大，因此分辨效果不佳。

**表 3.2　D 型模型固定深度参数反演误差**

| 序号 | 峰值时间/$s^{\frac{1}{2}}$ | 子波幅值 | 子波宽度 | 迭代步数 | 均方差/% |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.2 | 0.6 | 0.20 | 62863 | 1.49 |
| b | 0.2 | 0.6 | 0.18 | 62373 | 1.78 |
| c | 0.2 | 0.6 | 0.16 | 60892 | 2.12 |
| d | 0.2 | 0.6 | 0.14 | 61301 | 2.57 |
| e | 0.2 | 0.6 | 0.12 | 56076 | 3.09 |
| f | 0.2 | 0.6 | 0.10 | 58696 | 3.58 |
| g | 0.2 | 0.6 | 0.08 | 61728 | 3.95 |
| h | 0.2 | 0.6 | 0.06 | 61882 | 4.02 |
| i | 0.2 | 0.6 | 0.04 | 60665 | 3.53 |
| j | 0.2 | 0.6 | 0.02 | 62295 | 2.34 |

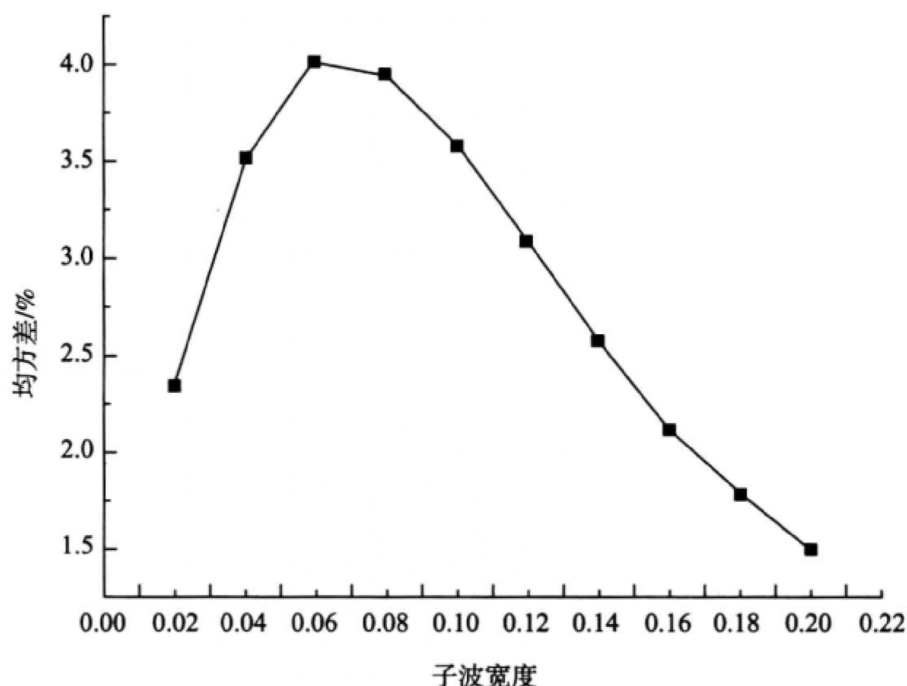
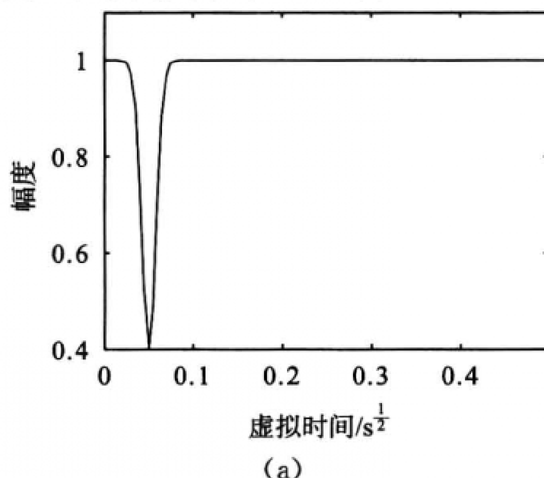



图 3.5　均方误差随子波宽度的变化曲线

### 3.1.2　单负峰模型分析

按照对单正峰模型进行模拟的方式对单负峰模型进行分析，以负高斯脉冲为子波合成的虚拟波场记录如图 3.6（a）所示，积分后衰减曲线如图 3.6（b）所示。叠加子波的积分函数如图 3.6（c）所示，对其进行离散积分得到的衰减曲线与正常正演 G 型地电模型衰减曲线的变化规律相符。因此，可将单负峰高斯脉冲合成记录视为 G 型模型，按照上述方法进行反变换。

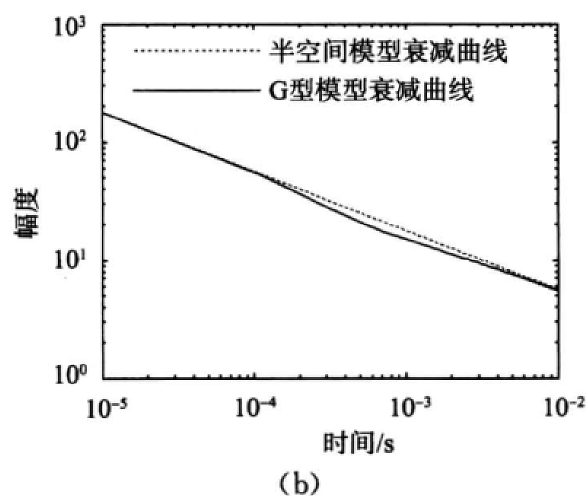
首先，固定子波宽度和幅值，改变子波峰值出现时间，并利用预条件正则化共轭梯度法进行反演，反演结果如图 3.7 所示。



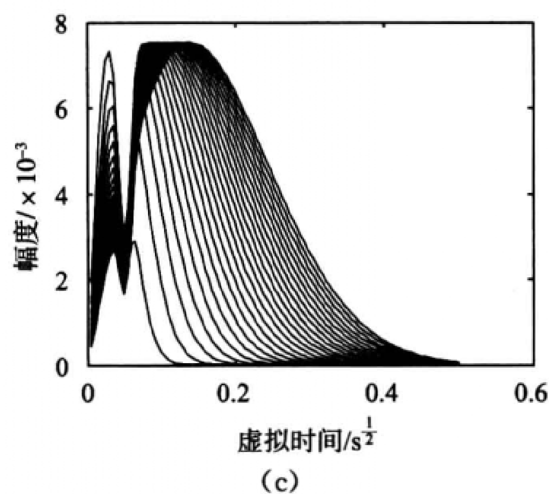

（a）

图 3.6　利用子波合成 G 型模型的波场记录

（a）虚拟波场记录；（b）等效模型衰减曲线；（c）不同采样时刻叠加子波的核函数

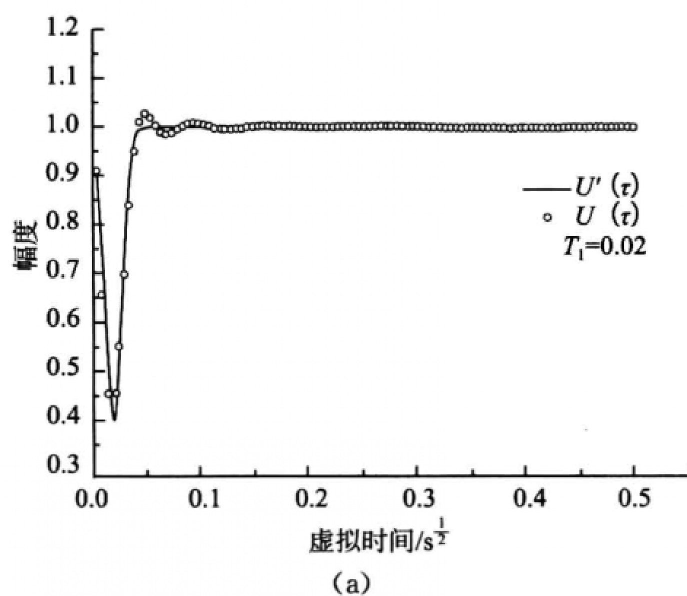



（b）



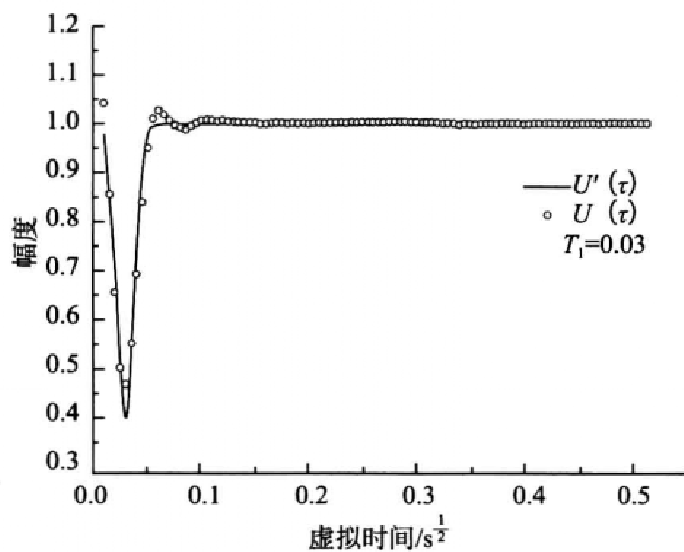

（c）

图 3.6　利用子波合成 G 型模型的波场记录（续）

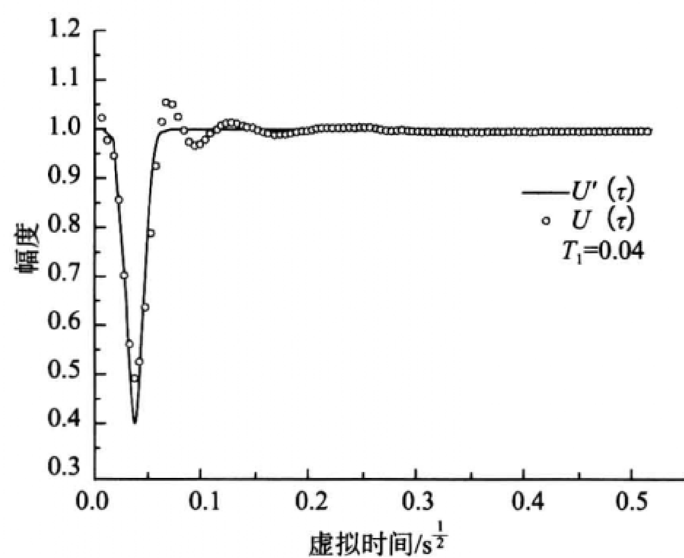



(a)

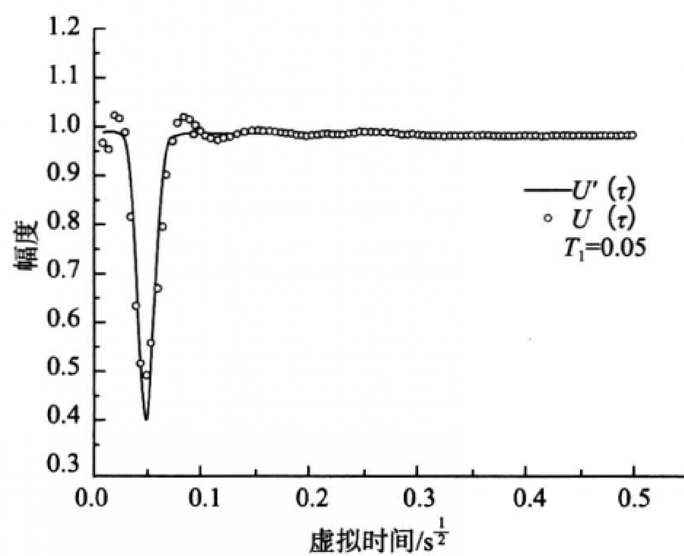
图 3.7　固定模型子波宽度改变峰值时间参数的反演拟合图




(b)

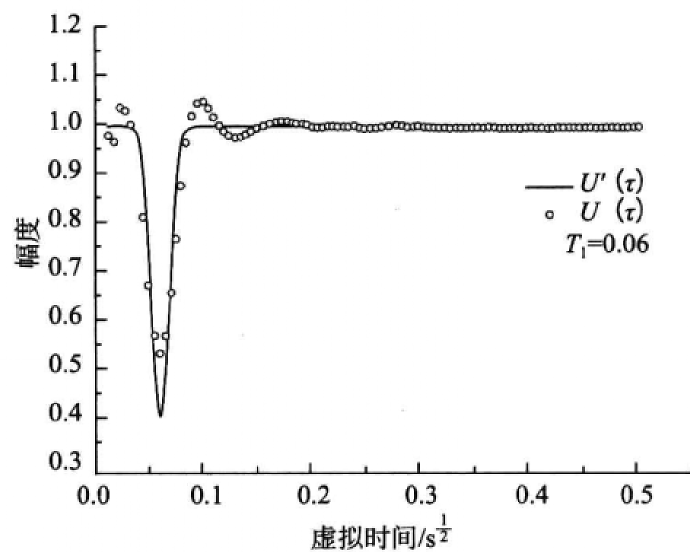



(c)

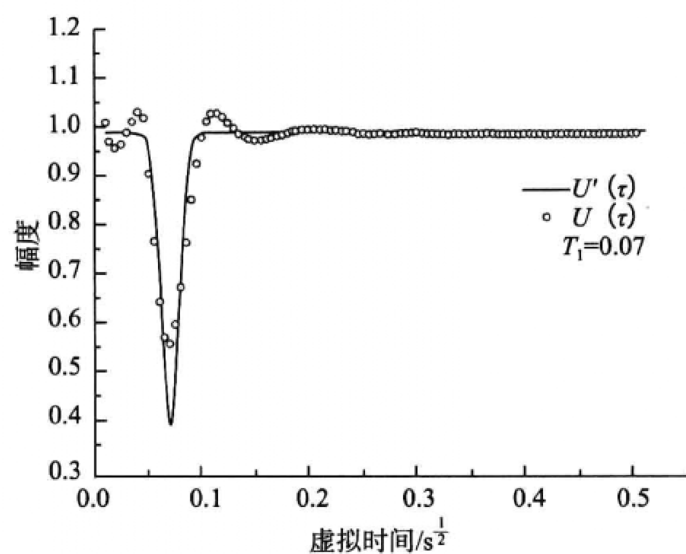



(d)

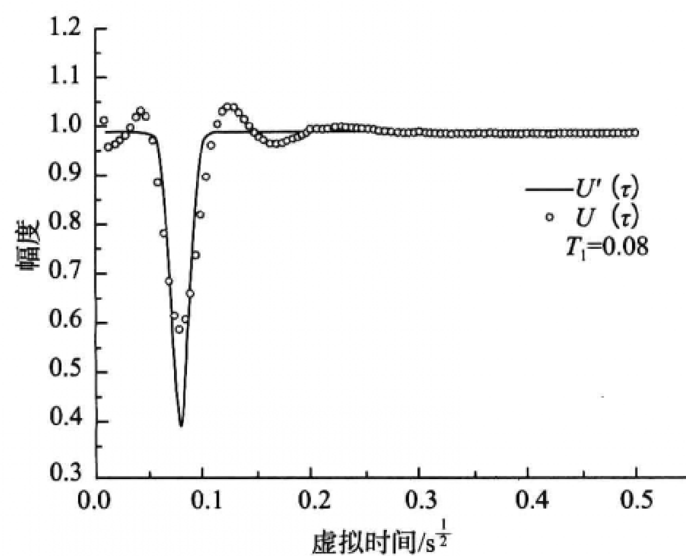
图 3.7　固定模型子波宽度改变峰值时间参数的反演拟合图（续）




(e)

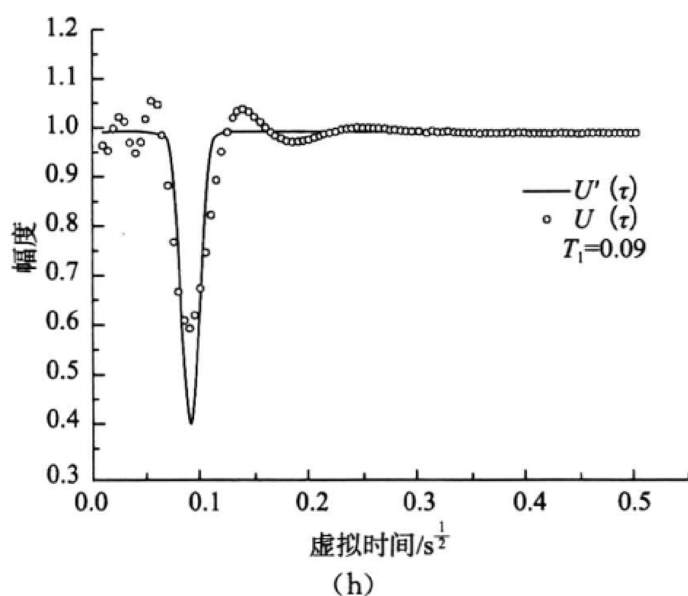



(f)

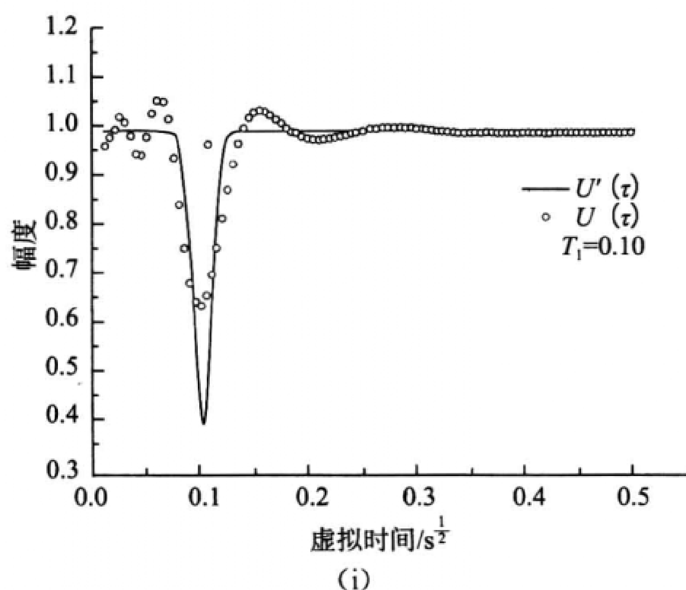



(g)

图 3.7　固定模型子波宽度改变峰值时间参数的反演拟合图（续）




(h)




(i)

图 3.7　固定模型子波宽度改变峰值时间参数的反演拟合图（续）

由图 3.7 可知，随着负峰值的延迟，反演子波振幅逐渐衰减，子波宽度略有增加。这与波在有耗介质中的传播规律相符，从而证明了算法的正确性。对模型反演参数做统计，如表 3.3 所示。随着子波峰值出现时间的延迟，拟合误差逐渐增大，如图 3.8 所示。模型的反演结果充分说明了瞬变电磁方法对浅部异常分辨率较高。随着深度的增加，电磁波高频部分损失严重，响应主要为低频响应，因此分辨率降低。

固定子波峰值时间，改变子波宽度，按照文中所述方法进行波场变换，以找到波场对子波宽度的最小分辨。波场变换结果如图 3.9 所示。

**表 3.3　G 型模型固定电阻率参数的反演误差**

| 序号 | 峰值时间/$s^{\frac{1}{2}}$ | 子波幅值 | 子波宽度 | 迭代次数 | 均方差/% |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.02 | −0.6 | 0.04 | 59407 | 0.59 |
| b | 0.03 | −0.6 | 0.04 | 59432 | 0.63 |
| c | 0.04 | −0.6 | 0.04 | 63599 | 1.07 |
| d | 0.05 | −0.6 | 0.04 | 63980 | 1.13 |
| e | 0.06 | −0.6 | 0.04 | 60526 | 1.38 |
| f | 0.07 | −0.6 | 0.04 | 60495 | 1.67 |
| g | 0.08 | −0.6 | 0.04 | 64805 | 1.9 |
| h | 0.09 | −0.6 | 0.04 | 62486 | 2.1 |
| i | 0.10 | −0.6 | 0.04 | 61505 | 2.51 |

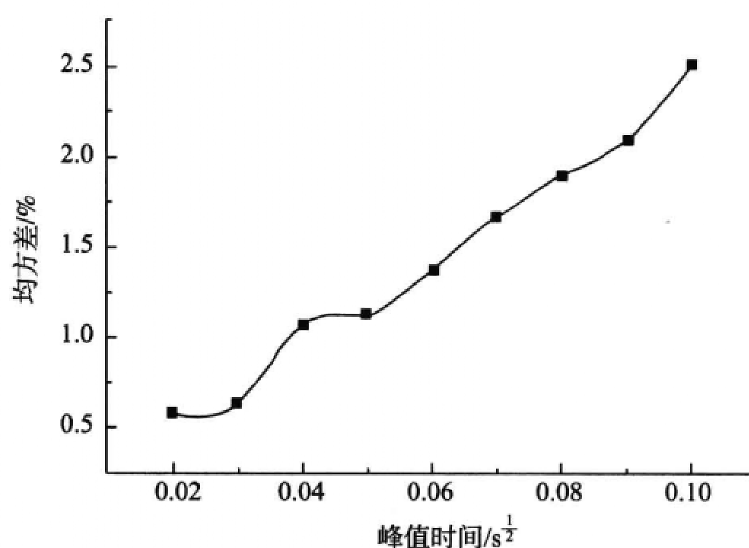
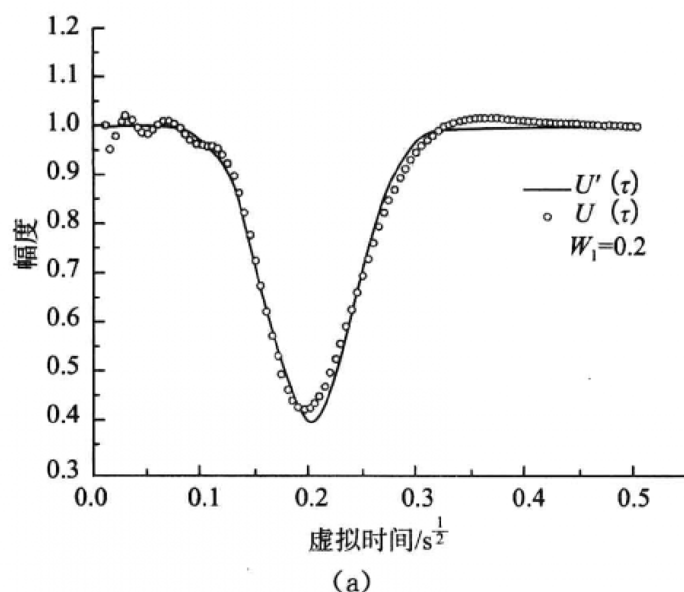
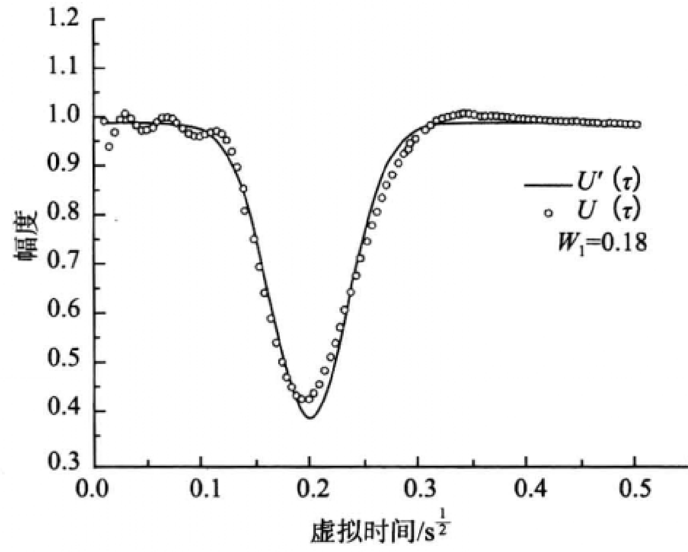



图 3.8　均方误差随子波峰值时间的变化曲线

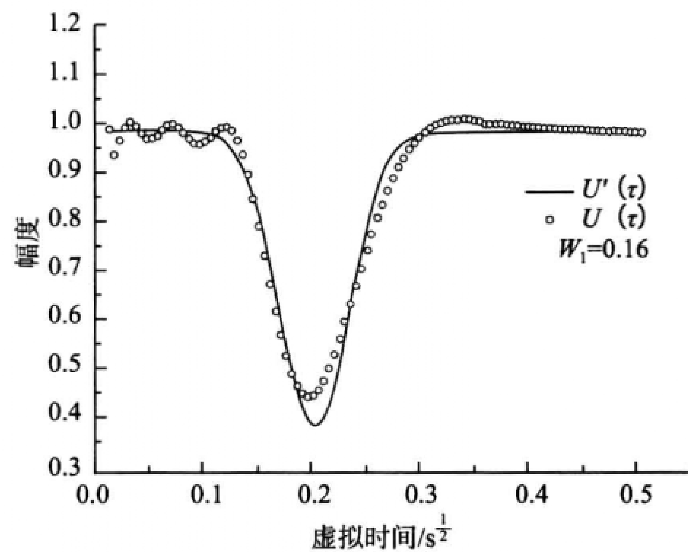



(a)

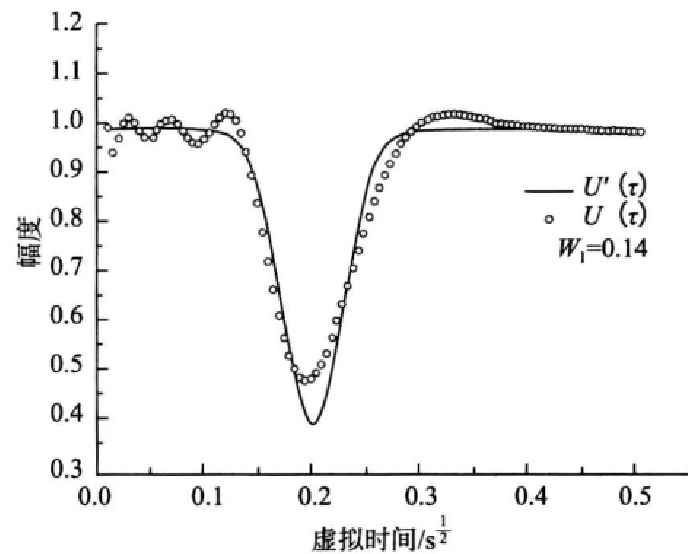
图 3.9　固定模型第一层厚度改变电阻率差异的反演拟合图




(b)

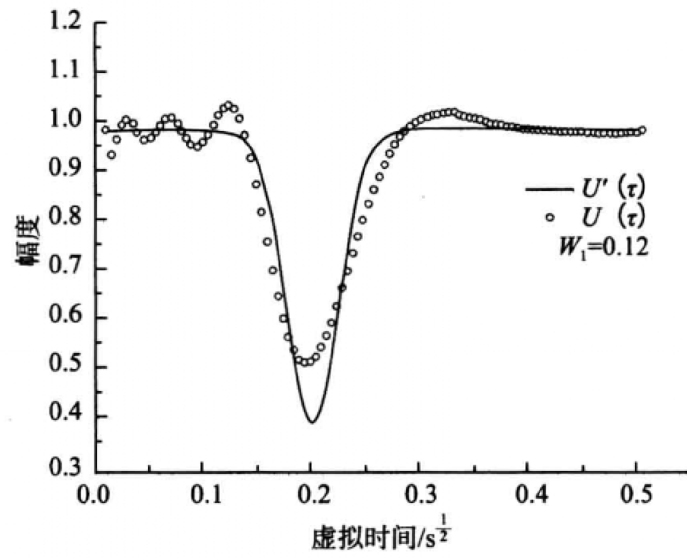



(c)

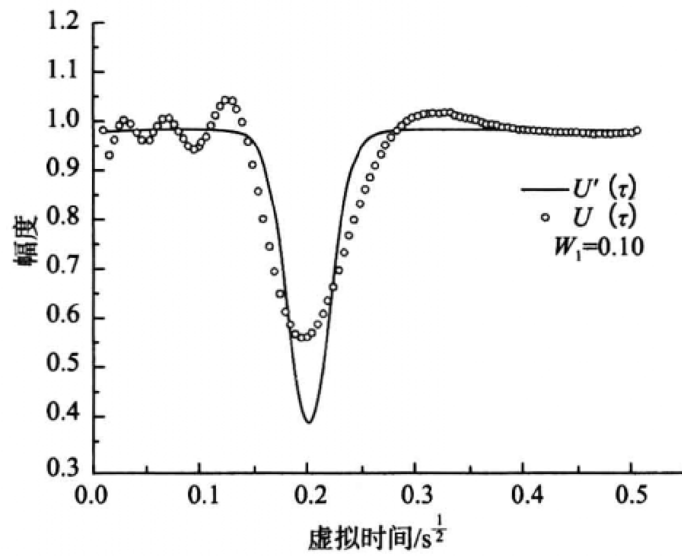



(d)

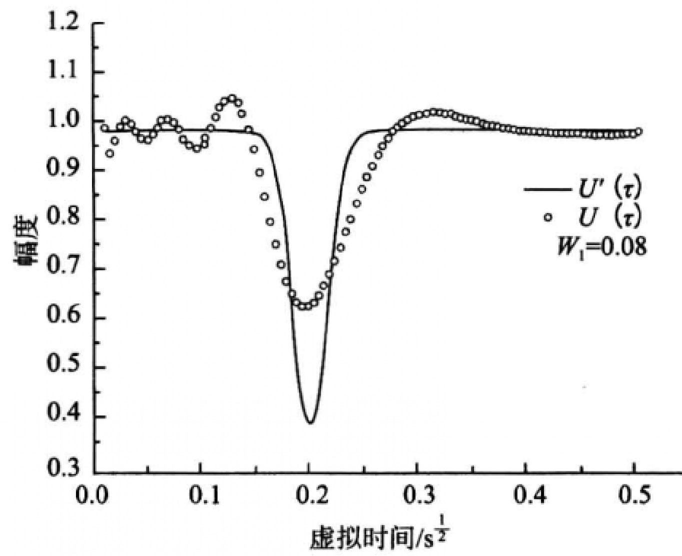
图 3.9　固定模型第一层厚度改变电阻率差异的反演拟合图（续）




(e)

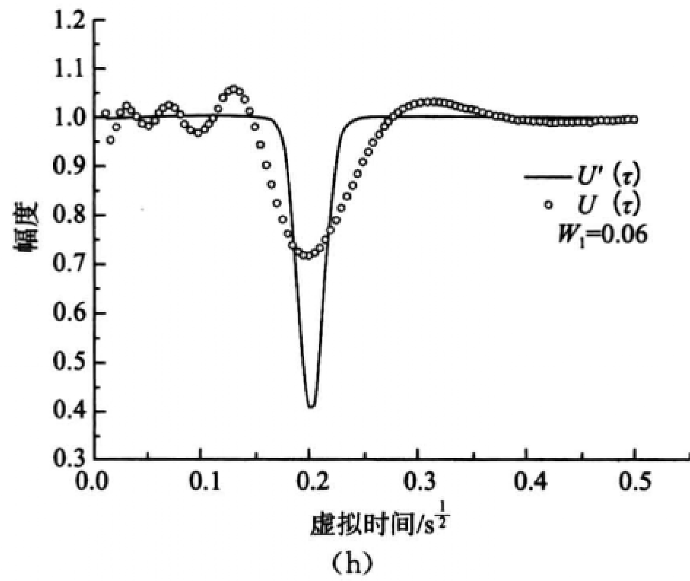



(f)

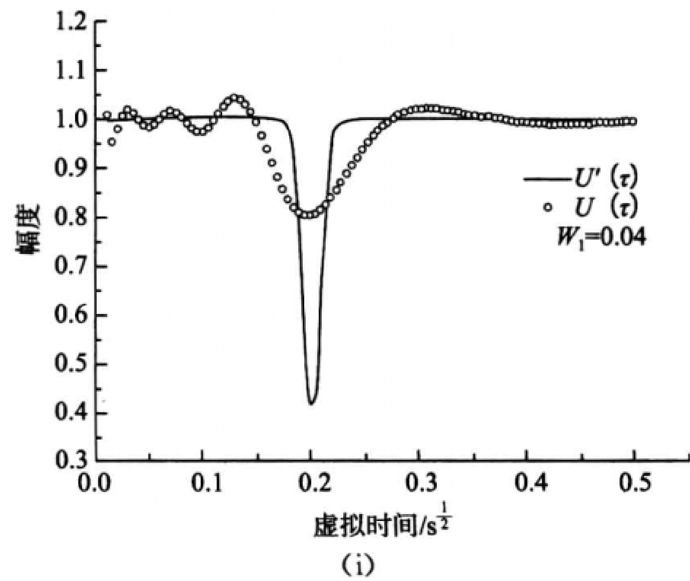



(g)

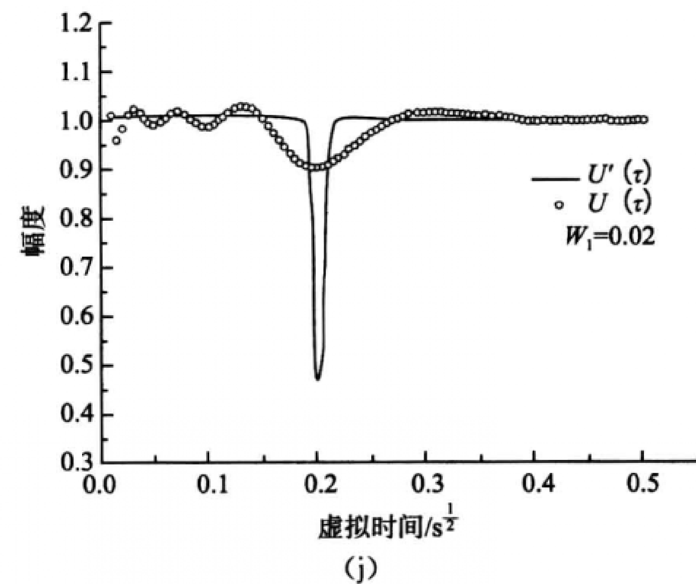
图 3.9　固定模型第一层厚度改变电阻率差异的反演拟合图（续）




(h)




(i)




(j)

图 3.9　固定模型第一层厚度改变电阻率差异的反演拟合图（续）

根据反变换结果可知，在相同峰值时间下，子波宽度越大越容易分辨。随着子波宽度的变小，反变换结果对界面的显示越来越不明显。对反演模型结果进行列表分析，如表 3.4 与图 3.10 所示，除了前两点外，随着子波宽度的增加，拟合误差逐渐减少，当子波宽度为 $0.04s^{\frac{1}{2}}$ 时，拟合误差较小，而且虚拟子波幅值比最大旁瓣幅值约大一个量级。当子波宽度为 $0.02s^{\frac{1}{2}}$ 时，虽然拟合误差较小，但是虚拟子波幅值比最大旁瓣幅值仅大几倍，因此，随着子波宽度变窄，波场不能很好地分辨电性界面。

**表 3.4　G 型模型固定模型第一层厚度参数反演误差表**

| 序号 | 峰值时间/$s^{\frac{1}{2}}$ | 子波幅值 | 子波宽度 | 迭代步数 | 均方误差/% |
|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.2 | −0.6 | 0.20 | 62519 | 1.44 |
| b | 0.2 | −0.6 | 0.18 | 63641 | 1.72 |
| c | 0.2 | −0.6 | 0.16 | 60894 | 2.1 |
| d | 0.2 | −0.6 | 0.14 | 63855 | 2.59 |
| e | 0.2 | −0.6 | 0.12 | 64006 | 3.14 |
| f | 0.2 | −0.6 | 0.10 | 62725 | 3.67 |
| g | 0.2 | −0.6 | 0.08 | 62404 | 4.06 |
| h | 0.2 | −0.6 | 0.06 | 61728 | 4.15 |
| i | 0.2 | −0.6 | 0.04 | 62643 | 3.65 |
| j | 0.2 | −0.6 | 0.02 | 64018 | 2.44 |

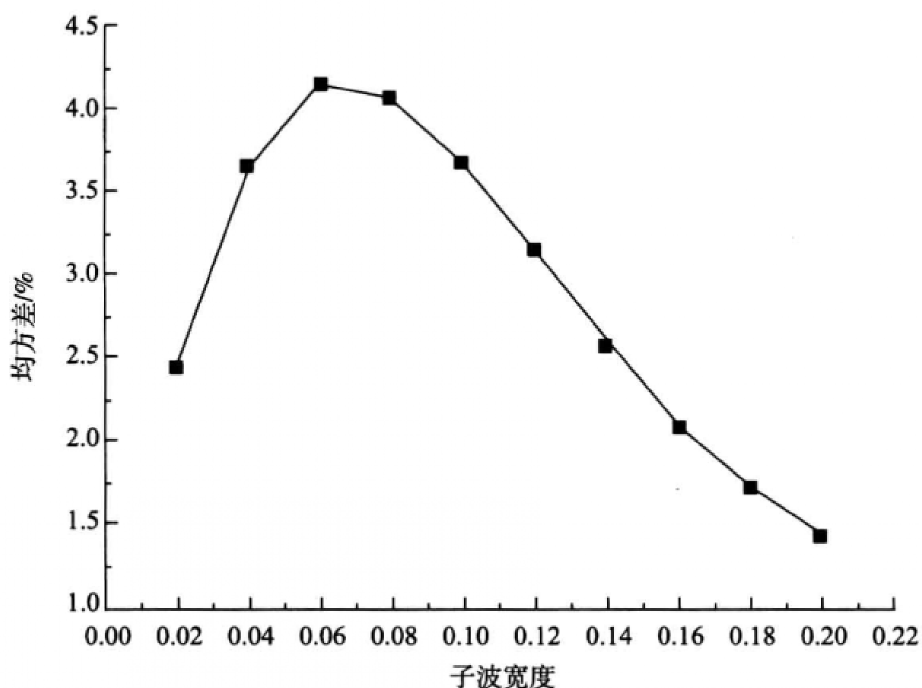



图 3.10　均方误差随子波宽度变化曲线

分析两层模型的波场变换结果，总体上来说 G 型模型与 D 型模型变换结果基本相似。在相同深度下，随着层间电阻率的差异减小，虚拟波场子波幅值逐渐减小，并且子波宽度小到一定程度时，波场不能分辨介质电性分界面。在相同电阻率差异条件下，随着峰值虚拟时间的推迟，虚拟波场子波振幅逐渐衰减，而且子波具有展宽现象。

## 3.2　三层模型分析

在导电媒质中，电磁波的传播速度和衰减速度都较快，因此对多层界面的识别比较困难。为了分析反变换对多层模型的计算效果，研究人员设计了具有两个子波的模型，并进行反演拟合分析。

### 3.2.1　双正峰虚拟波场记录

波场记录如图 3.11（a）所示，正变换后所得扩散场时间衰减信号如图 3.11（b）中实线所示，为了方便对比，图中虚线给出了无反射界面情况下衰减信号。Q 型模型电阻率逐层减小，表现在瞬变电磁衰减曲线上为衰减信号降低速度逐渐变缓，与所给模型扩散信号相似，因此可将该记录视为 Q 型模型虚拟波场合成记录。

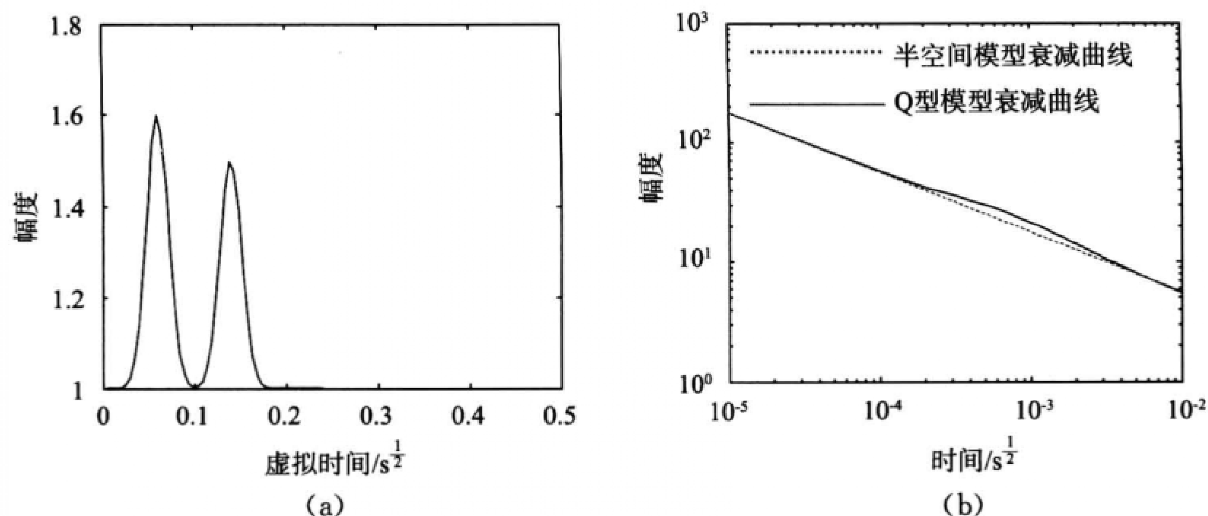
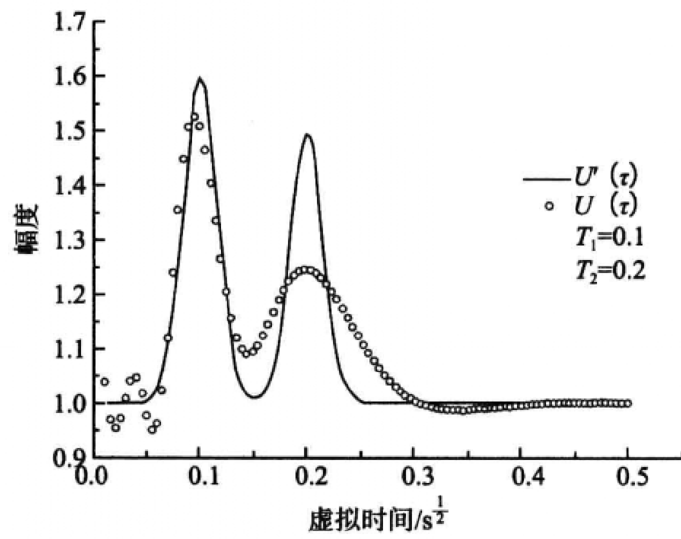


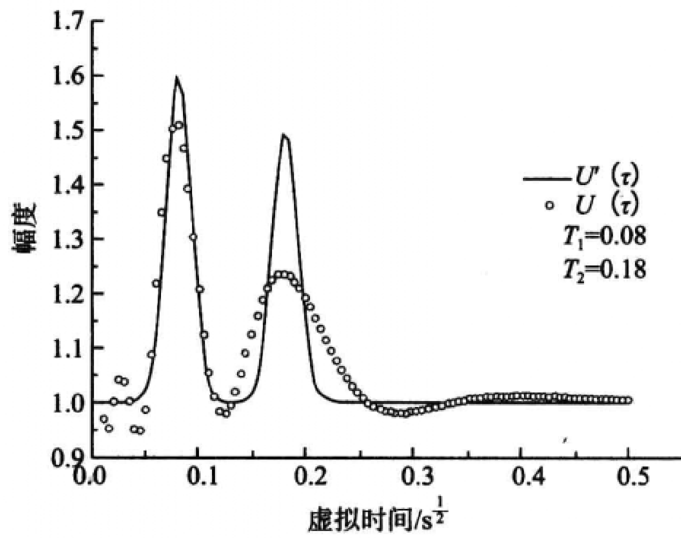

图 3.11　利用子波合成 Q 型模型波场的记录

（a）虚拟波场合成记录；（b）正变换衰减曲线

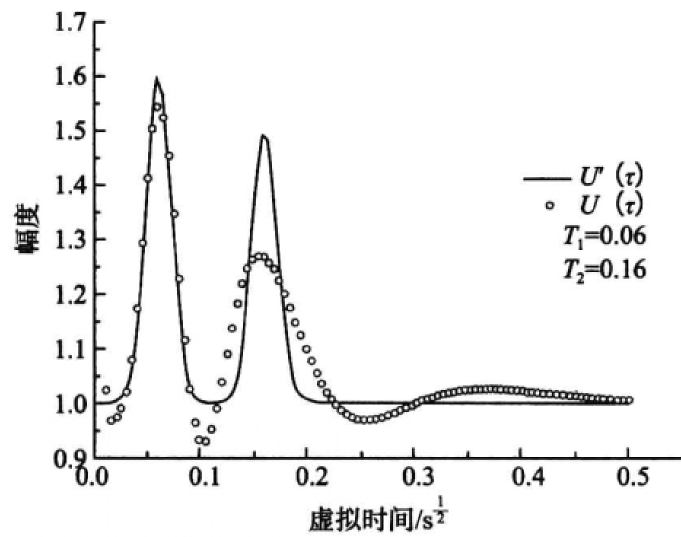
根据文中所述方法进行反演。为了便于分析首先确定子波宽度，给定第一峰值时刻与第二峰值时刻的间距，改变第一峰值出现时间（$T_1$）。结果如图 3.12（a）～图 3.12（c）所示。然后，给定第一峰值时间（$T_1$），逐渐提前第二峰值出现时间（$T_2$），结果如图 3.12（c）～图 3.12（f）所示。




(a)

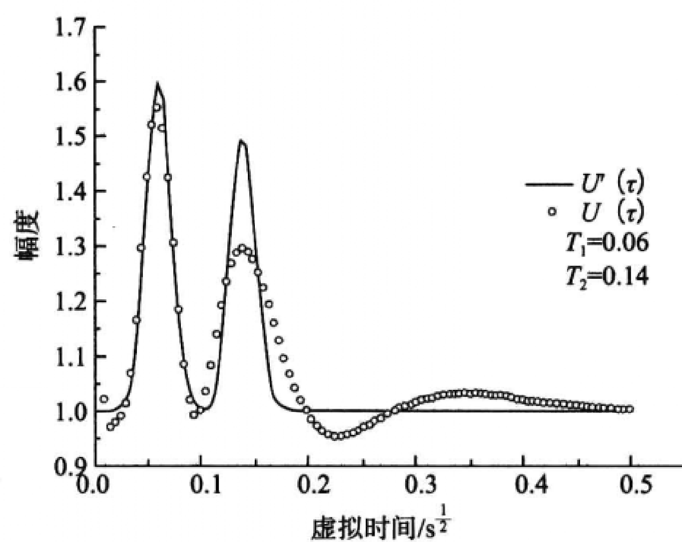



(b)

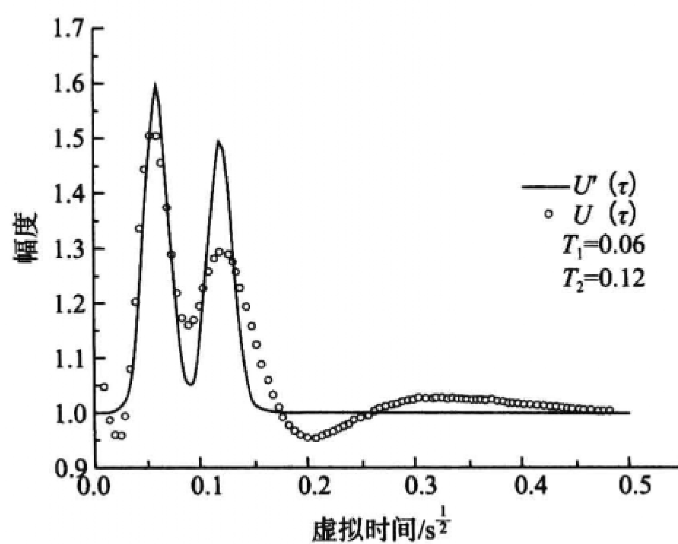



(c)

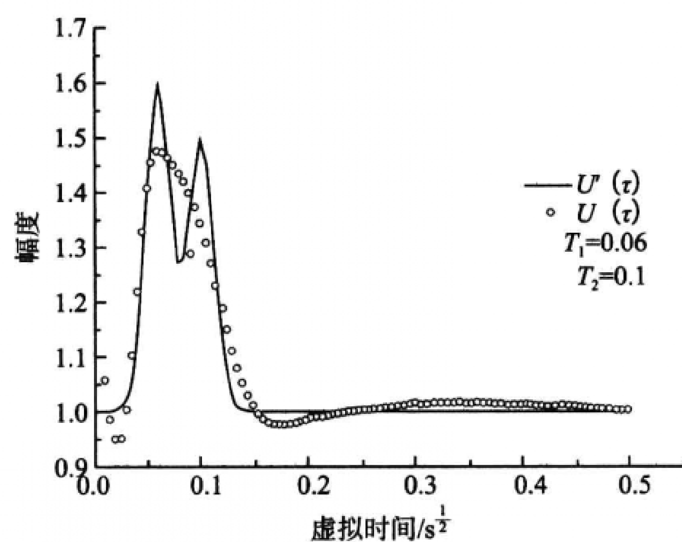
图 3.12　Q 型模型波场反变换结果



(d)



(e)



(f)

图 3.12　Q 型模型波场反变换结果（续）

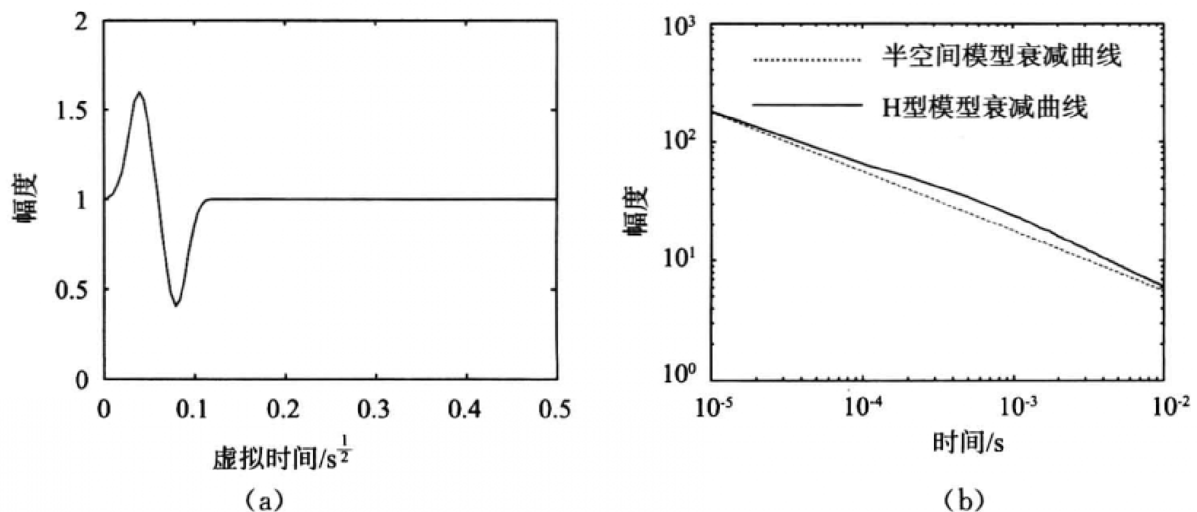
由 Q 型模型反变换结果可知，对于多层界面模型，随着模型峰值出现时刻的推迟，虚拟子波的幅值逐渐衰减，而且第二个子波振幅衰减尤为严重。随着两个峰值出现间隔的减小，虚拟波场反射子波逐渐相互重叠，使得对薄层的分辨率降低。由表 3.5 可知，当已知子波距离为 $0.04s^{\frac{1}{2}}$ 时，波场变换子波相互重叠，对薄层基本不能分辨。给出模型电阻率参数，由此可以确定波场对不同深度薄层的最小分辨厚度。

**表 3.5　Q 型模型波场变换误差统计表**

| 序号 | 第一峰值位置 | 第一子波宽度 | 第一子波幅值 | 第二峰值位置 | 第二子波宽度 | 第二子波振幅 | 迭代步数 | 方差/% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.1 | 0.06 | 0.6 | 0.20 | 0.06 | 0.5 | 1269213 | 4.7582 |
| b | 0.08 | 0.06 | 0.6 | 0.18 | 0.06 | 0.5 | 1277407 | 3.8505 |
| c | 0.06 | 0.06 | 0.6 | 0.16 | 0.06 | 0.5 | 1271561 | 3.7838 |
| d | 0.06 | 0.06 | 0.6 | 0.14 | 0.06 | 0.5 | 1272517 | 3.4252 |
| e | 0.06 | 0.06 | 0.6 | 0.12 | 0.06 | 0.5 | 1272594 | 3.7434 |
| f | 0.06 | 0.06 | 0.6 | 0.10 | 0.06 | 0.5 | 1267121 | 2.8502 |

### 3.2.2　正负双峰虚拟波场记录

图 3.13（a）为虚拟波场合成记录，其在时间域扩散场的衰减信号如图 3.13（b）所示。由于 H 型模型电阻率先减小后增大，表现在瞬变电磁衰减曲线上为衰减信号幅度降低速度先变缓后逐渐加快，与模型在时间域衰减信号的



(a)　　　　(b)

图 3.13　合成 H 型模型波场子波示意图

（a）虚拟波场合成记录；（b）正变换衰减曲线

变化一致。因此，合成瞬变电磁虚拟波场记录为类 H 型虚拟波场记录。根据文章所述算法，对衰减信号进行反变换，并与已知波场对比，反变换结果如图 3.14 所示。

依照文中所述方法对 H 型模型的衰减信号进行波场变换。首先固定模型子波宽度，给定第一峰值时间，第二峰值时间逐步延迟，对模型进行变换，波场变换如图 3.14 所示。

由图 3.14（a）～图 3.14（g）可知由于第一峰值出现时间不变，反变换波形中第一个子波与理论子波吻合较好，随着两峰值间隔的增加，变换的第二个子波振幅逐渐衰减，由表 3.6 可知拟合误差逐渐增大。

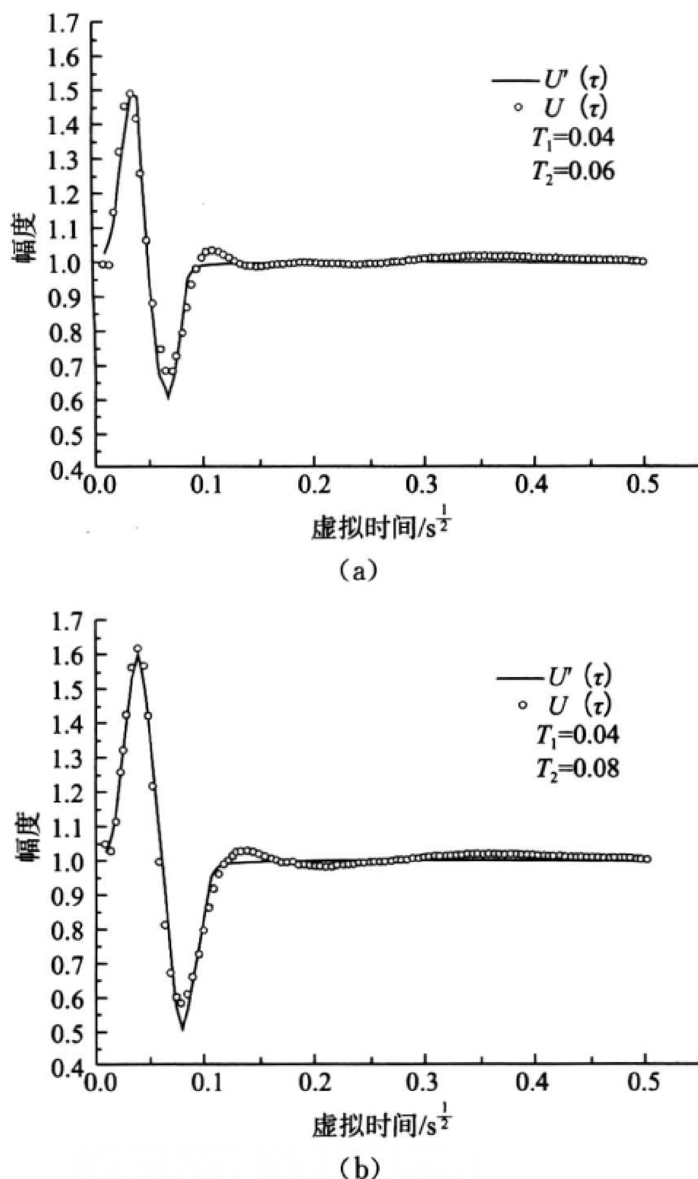
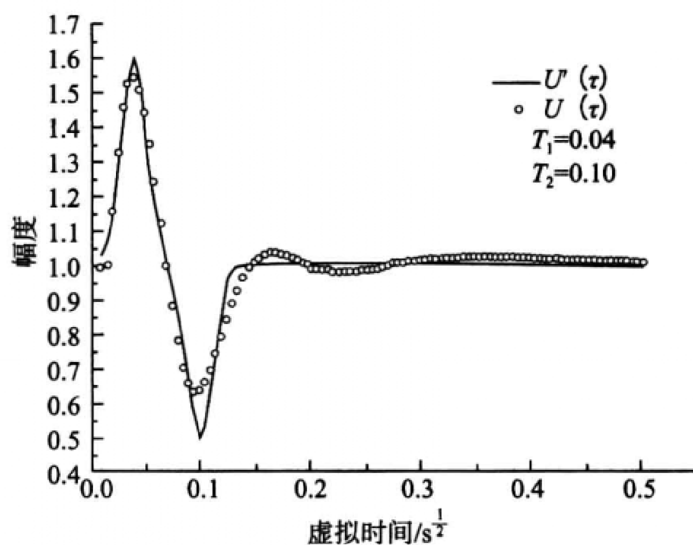
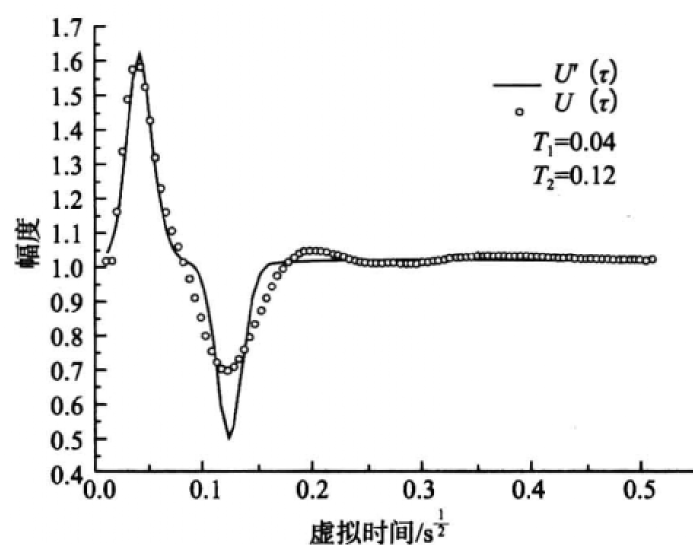



图 3.14　H 型模型波场变换图

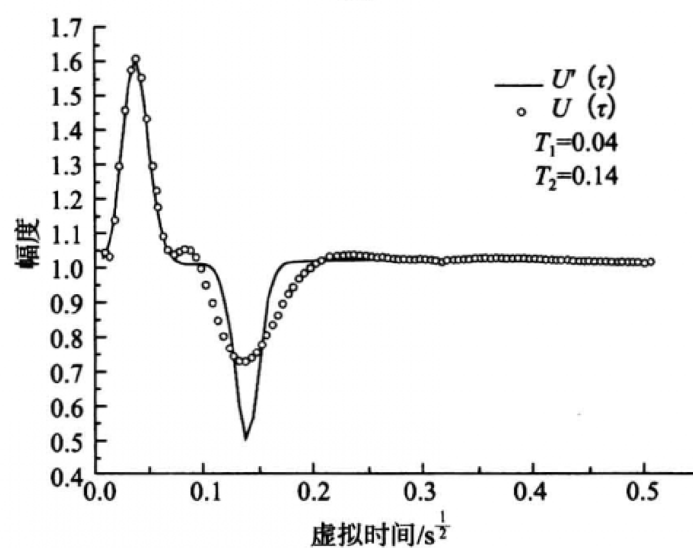
（a）第二峰值时间 $T_2=0.06$；（b）第二峰值时间 $T_2=0.08$；（c）第二峰值时间 $T_2=0.10$；
（d）第二峰值时间 $T_2=0.12$；（e）第二峰值时间 $T_2=0.14$；
（f）第二峰值时间 $T_2=0.16$；（g）第二峰值时间 $T_2=0.18$




(c)

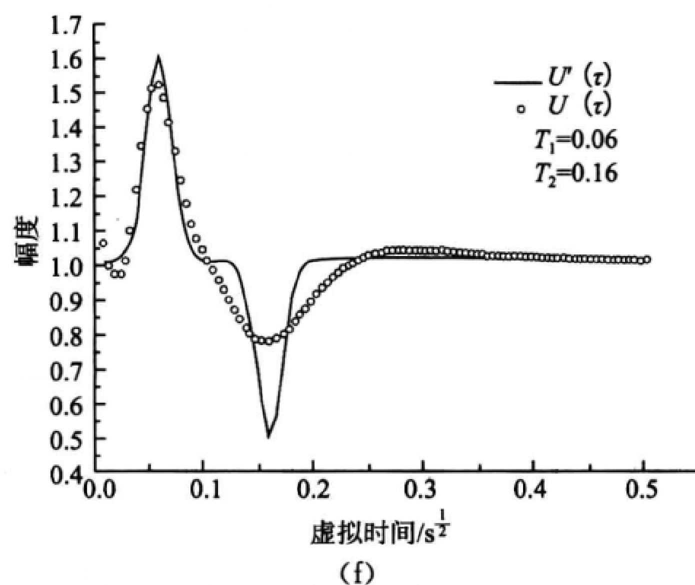



(d)

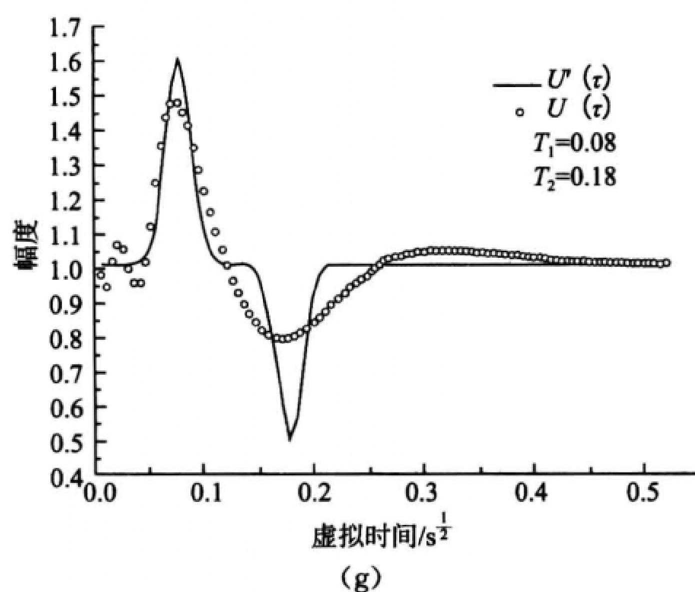



(e)

图 3.14　H 型模型波场变换图（续）




(f)




(g)

图 3.14　H 型模型波场变换图（续）

**表 3.6　H 型模型波场变换误差统计表**

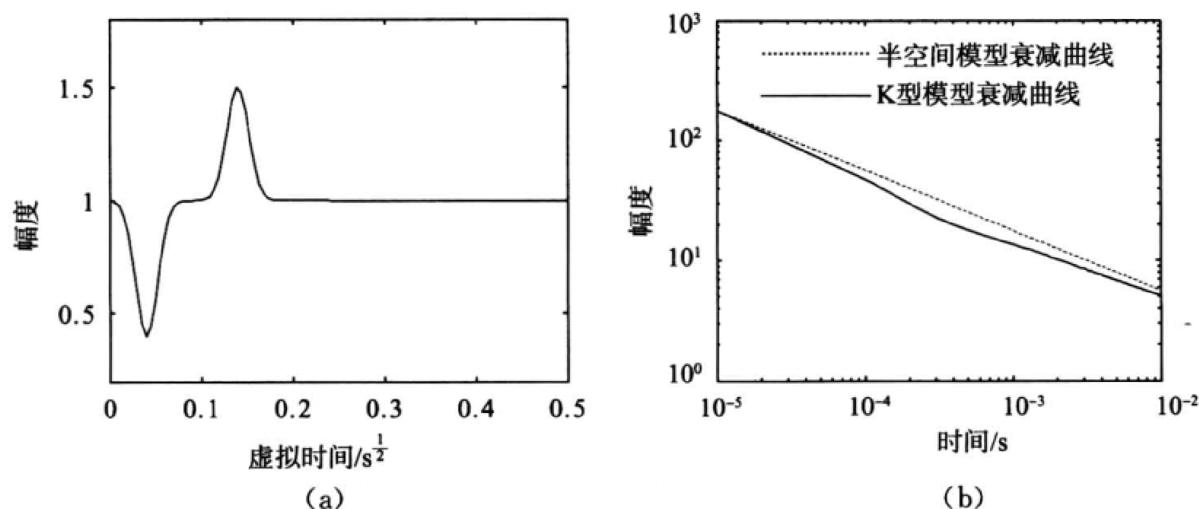
| 序号 | 第一峰值位置 | 第一子波宽度 | 第一子波幅值 | 第二峰值位置 | 第二子波宽度 | 第二子波振幅 | 迭代步数 | 方差/% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.04 | 0.06 | 0.6 | 0.06 | 0.06 | −0.5 | 73491 | 1.3743 |
| b | 0.04 | 0.06 | 0.6 | 0.08 | 0.06 | −0.5 | 71107 | 1.7725 |
| c | 0.04 | 0.06 | 0.6 | 0.10 | 0.06 | −0.5 | 1276072 | 3.032 |

续表

| 序号 | 第一峰值位置 | 第一子波宽度 | 第一子波幅值 | 第二峰值位置 | 第二子波宽度 | 第二子波振幅 | 迭代步数 | 方差/% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| d | 0.04 | 0.06 | 0.6 | 0.12 | 0.06 | −0.5 | 1273393 | 2.9119 |
| e | 0.04 | 0.06 | 0.6 | 0.14 | 0.06 | −0.5 | 1275730 | 2.8213 |
| f | 0.06 | 0.06 | 0.6 | 0.16 | 0.06 | −0.5 | 1269651 | 4.3382 |
| g | 0.08 | 0.06 | 0.6 | 0.18 | 0.06 | −0.5 | 1274553 | 5.3975 |

### 3.2.3 负正双峰波场记录

负正双峰波场记录如图 3.15（a）所示，其对应的时间域衰减信号如图 3.15（b）所示。衰减曲线变换趋势与 K 型模型相似，表现在瞬变电磁衰减曲线上均为衰减信号，首支衰减较快尾支衰减变缓。因此，此波场记录可视为 K 型模型波场记录。

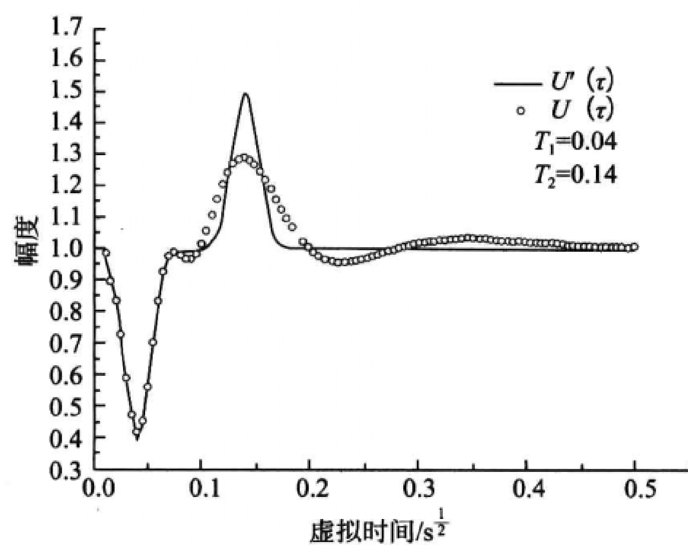



(a)　　(b)

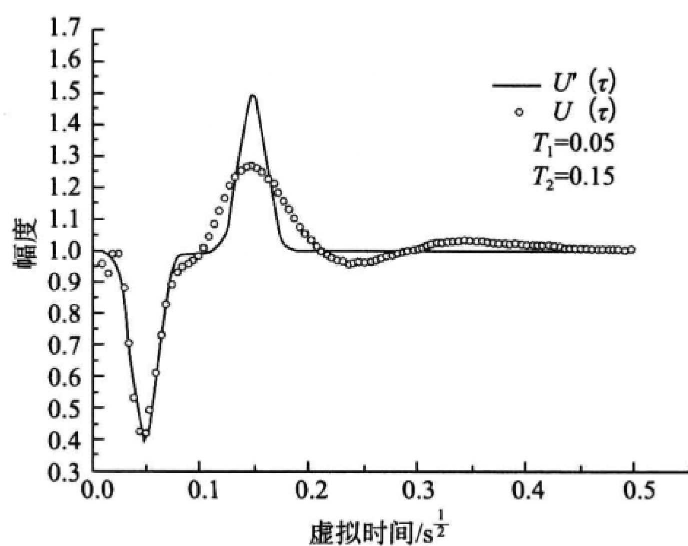
图 3.15　合成 K 型模型波场子波与衰减曲线示意图

（a）虚拟波场合成记录；（b）正变换衰减曲线

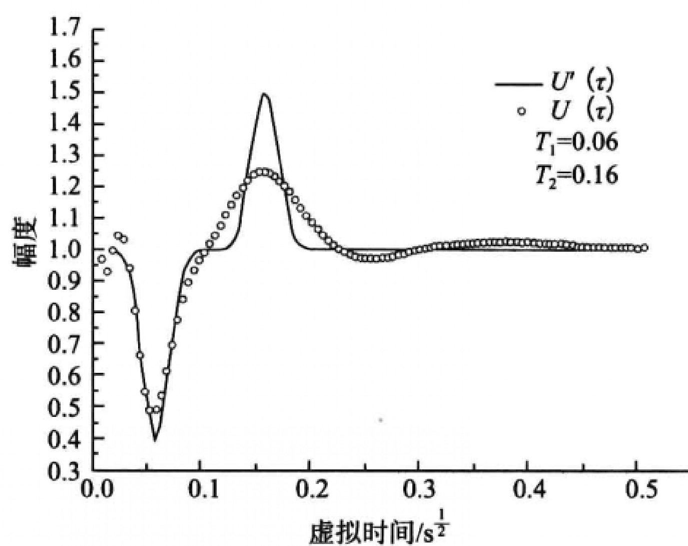
依照第 2 章所述方法对 K 型模型的衰减信号进行波场变换。固定模型子波宽度参数和峰值时间间隔。第一峰值时间逐渐推迟，波场变换结果如图 3.16 所示。由图可知虽然峰值时间间隔不变，但是随着第一峰值时间的推迟，第二峰值逐渐延迟。在反变换中，第一个子波振幅逐渐减低，第二个子波振幅衰减较第一个子波更快。由表 3.7 可知拟合误差也逐渐增大。




(a)

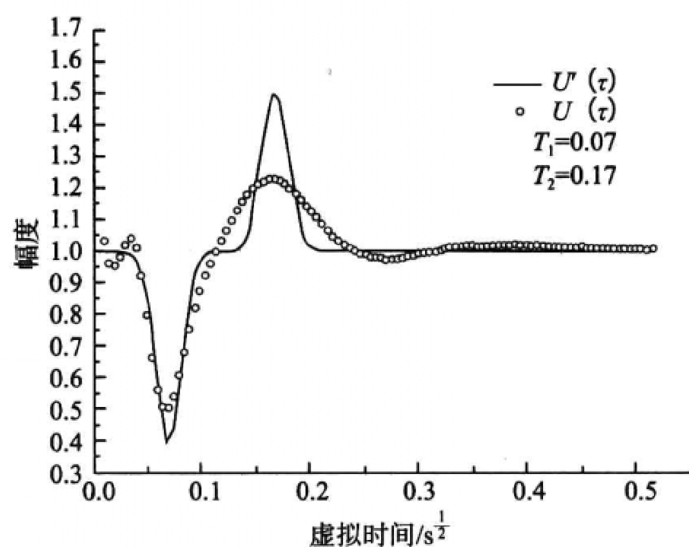



(b)

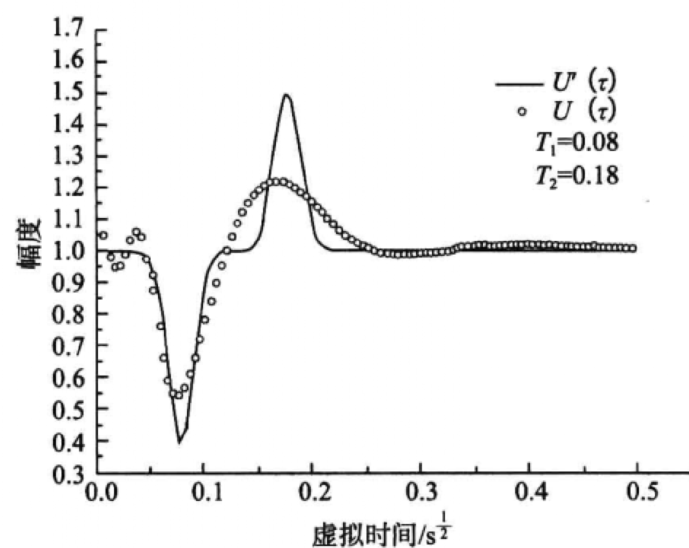



(c)

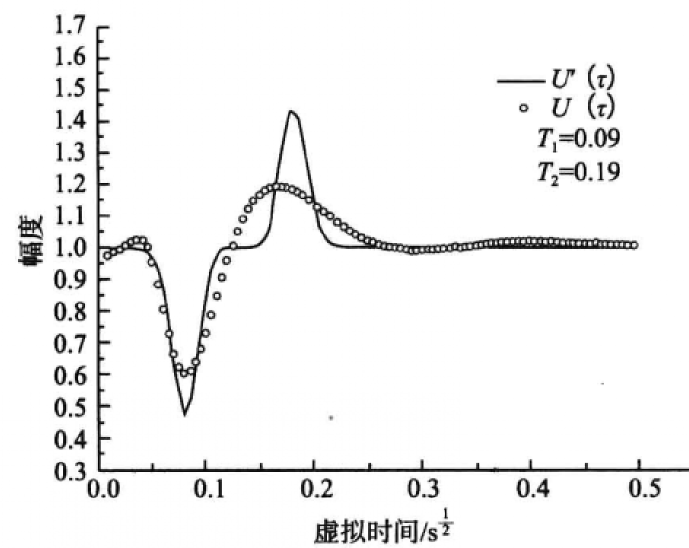
图 3.16　K 型模型波场反变换结果




(d)

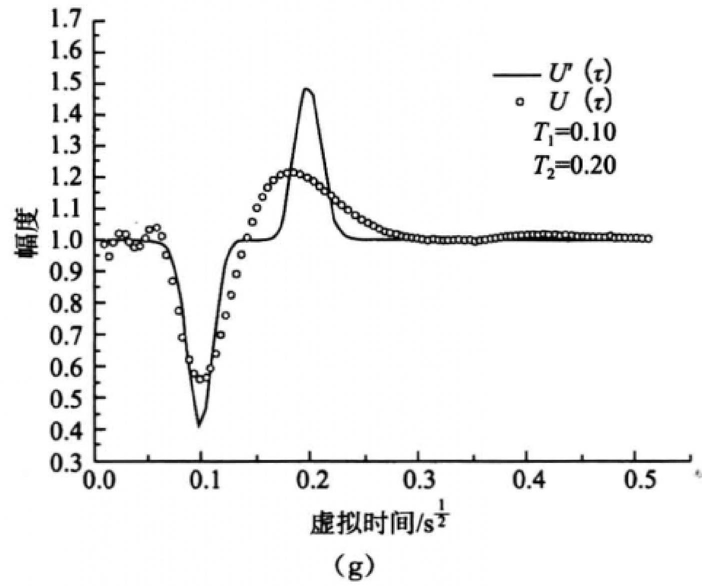



(e)

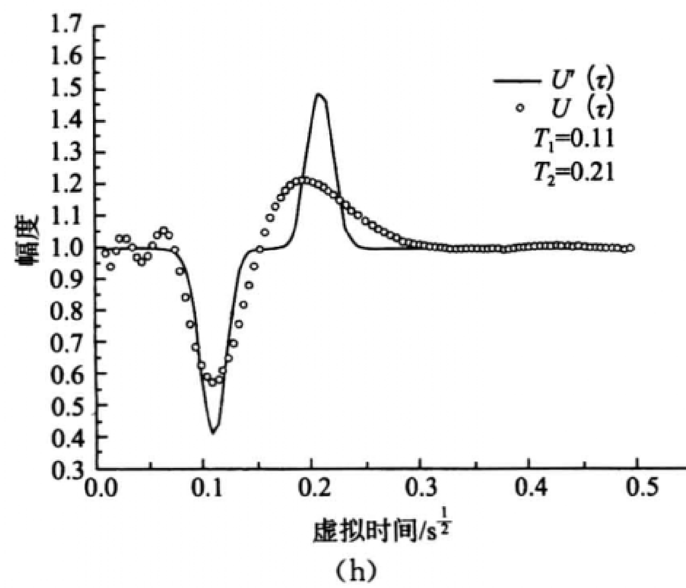



(f)

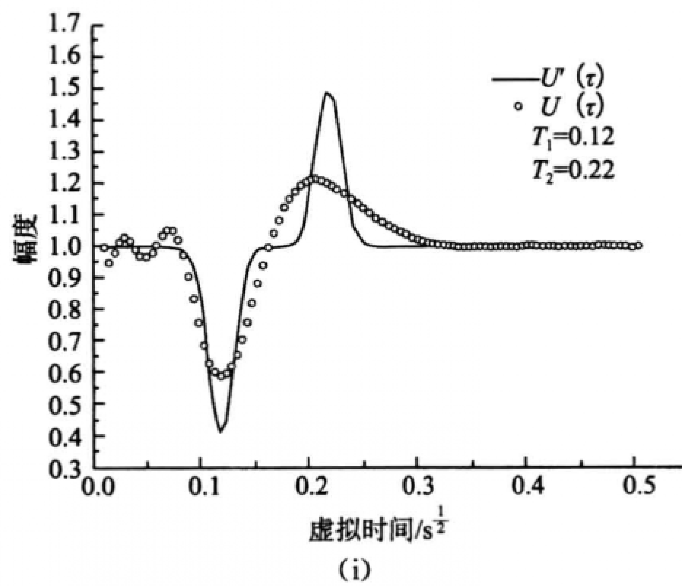
图 3.16 K 型模型波场反变换结果（续）




(g)




(h)




(i)

图 3.16　K 型模型波场反变换结果（续）

表 3.7 K 型模型波场变换误差统计表

| 序号 | 第一峰值位置 | 第一子波宽度 | 第一子波幅值 | 第二峰值位置 | 第二子波宽度 | 第二子波振幅 | 迭代步数 | 方差/% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.04 | 0.06 | −0.6 | 0.14 | 0.06 | 0.5 | 1272259 | 3.373 |
| b | 0.05 | 0.06 | −0.6 | 0.15 | 0.06 | 0.5 | 1273564 | 3.9016 |
| c | 0.06 | 0.06 | −0.6 | 0.16 | 0.06 | 0.5 | 1262827 | 4.2297 |
| d | 0.07 | 0.06 | −0.6 | 0.17 | 0.06 | 0.5 | 1270457 | 4.284 |
| e | 0.08 | 0.06 | −0.6 | 0.18 | 0.06 | 0.5 | 1270215 | 4.6335 |
| f | 0.09 | 0.06 | −0.6 | 0.19 | 0.06 | 0.5 | 1271489 | 3.8511 |
| g | 0.10 | 0.06 | −0.6 | 0.20 | 0.06 | 0.5 | 1276221 | 4.7129 |
| h | 0.11 | 0.06 | −0.6 | 0.21 | 0.06 | 0.5 | 1267150 | 4.9841 |
| i | 0.12 | 0.06 | −0.6 | 0.22 | 0.06 | 0.5 | 1273142 | 5.0905 |

### 3.2.4 双负峰波场记录

双负峰波场记录如图 3.17（a）所示，其对应的时间域衰减信号如图 3.17（b）所示。衰减曲线变换趋势与 A 型模型衰减信号相似，A 型模型电阻率逐渐增大，表现在瞬变电磁衰减曲线上为衰减信号逐步变快，与所给波场记录减信号相似。因此，此波场记录可视为 A 型模型波场记录。

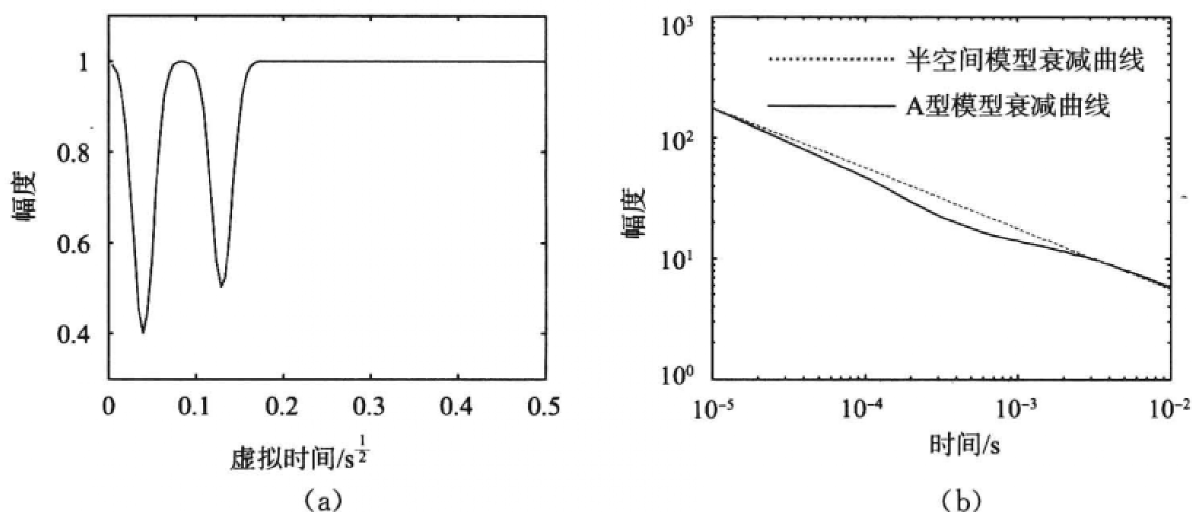
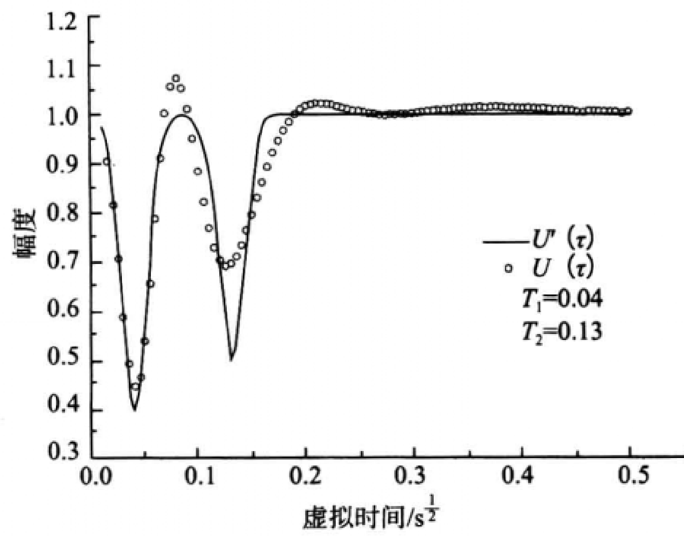



图 3.17 A 型模型合成波场记录与衰减曲线示意图

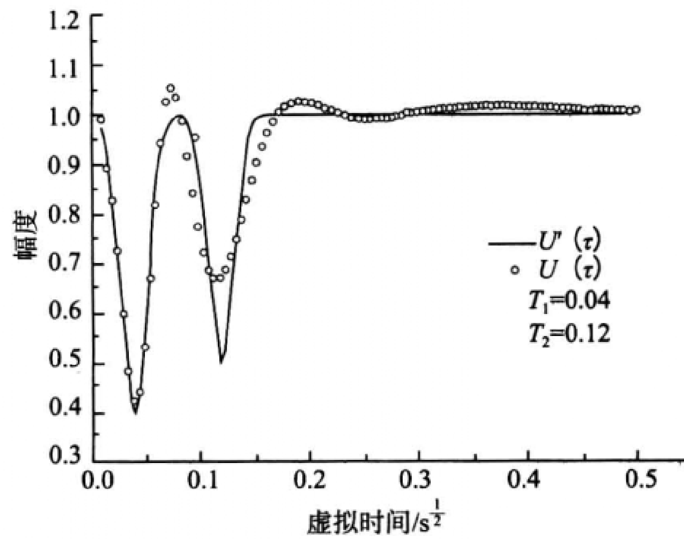
（a）虚拟波场合成记录；（b）衰减曲线

依照第 2 章所述方法对 A 型模型的衰减信号进行波场变换。固定子波宽度和第一峰值时间。第二峰值时间逐渐提前，波场变换结果如图 3.18 所示，并给出误差统计，如表 3.8 所示。由图 3.18 可知由于第一峰值时间不变，波场变换的首个子波振幅不变。随着第二峰值时间的提前，第二个子波振幅逐渐增加。两个子波相互靠近，当子波距离为 $0.04s^{\frac{1}{2}}$ 时，两个子波叠加在一起。

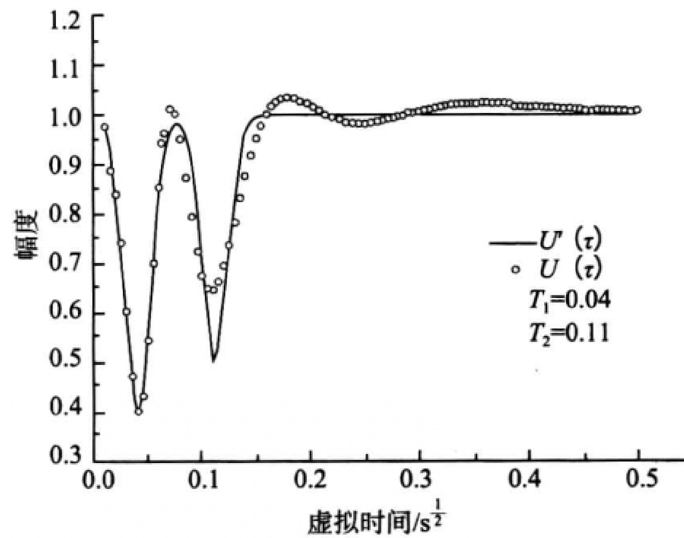
因此，波场反变换对于小于 $0.04s^{\frac{1}{2}}$ 的薄层，不能分辨。




(a)

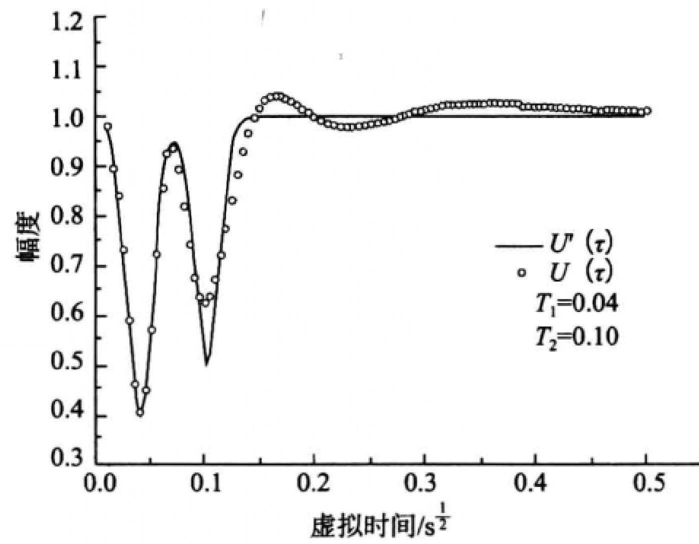



(b)

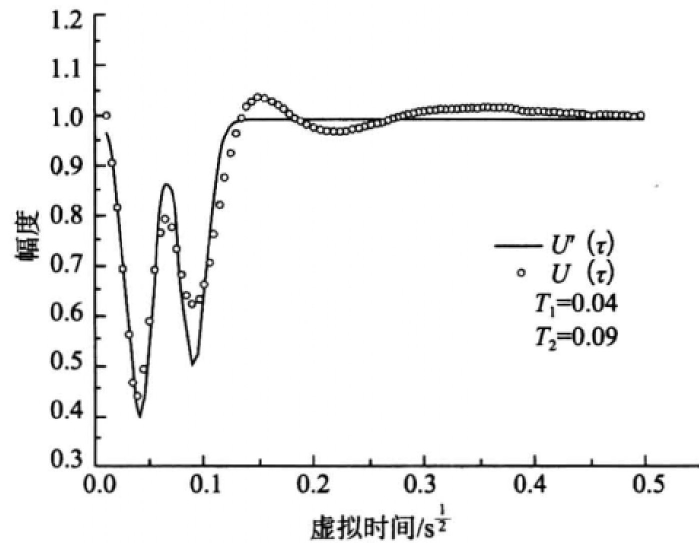



(c)

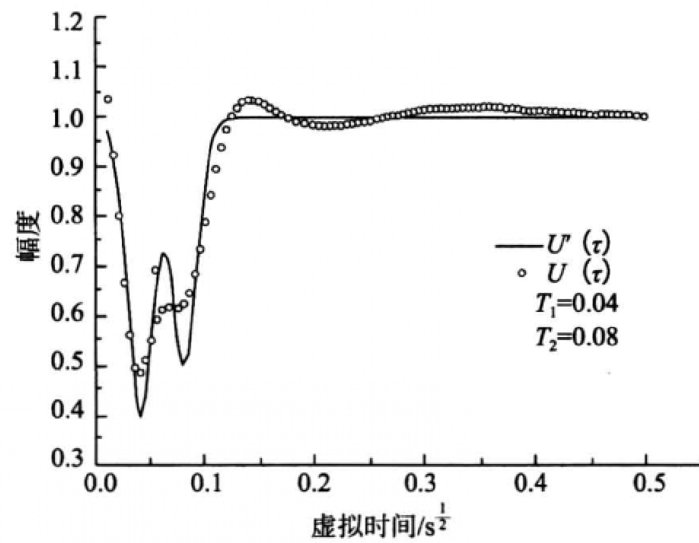
图 3.18　A 型模型波场反变换结果




(d)




(e)




(f)

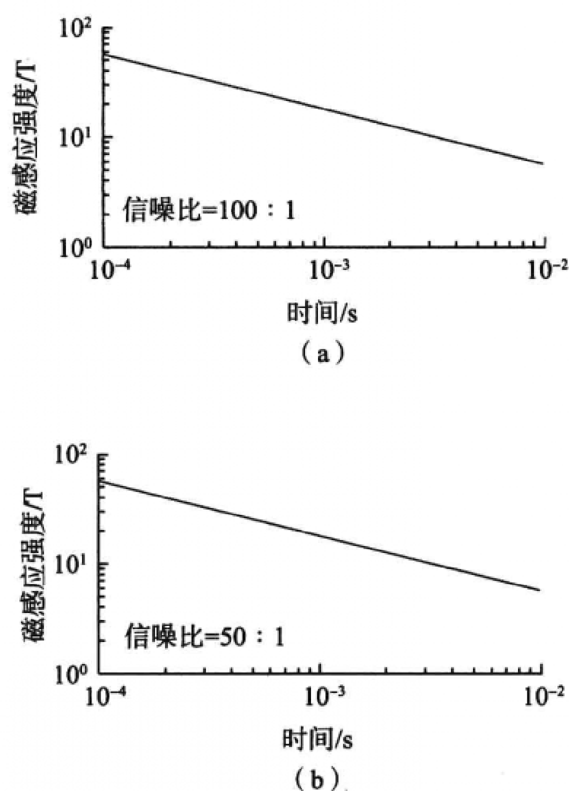
图 3.18　A 型模型波场反变换结果（续）

表 3.8　A 型模型波场变化误差统计表

| 序号 | 第一峰值位置 | 第一子波宽度 | 第一子波幅值 | 第二峰值位置 | 第二子波宽度 | 第二子波振幅 | 迭代步数 | 方差/% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 0.04 | 0.06 | −0.6 | 0.13 | 0.06 | −0.5 | 1269525 | 0.029219 |
| b | 0.04 | 0.06 | −0.6 | 0.12 | 0.06 | −0.5 | 1276592 | 0.026293 |
| c | 0.04 | 0.06 | −0.6 | 0.11 | 0.06 | −0.5 | 1275498 | 0.024571 |
| d | 0.04 | 0.06 | −0.6 | 0.10 | 0.06 | −0.5 | 1272992 | 0.023016 |
| e | 0.04 | 0.06 | −0.6 | 0.09 | 0.06 | −0.5 | 1274703 | 0.025678 |
| f | 0.04 | 0.06 | −0.6 | 0.08 | 0.06 | −0.5 | 1269852 | 0.025171 |

## 3.3　时间域响应加噪后的波场特征

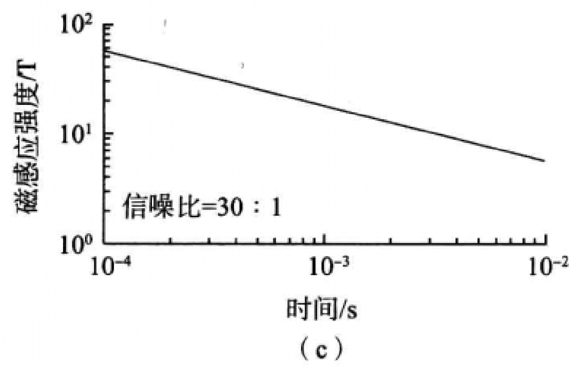
野外测量数据受各种因素影响难免会有误差，下面先以单位向量为例，首先进行波场正变换，得到时间域响应，然后在时间域响应中分别加入信噪比为 100∶1、50∶1、30∶1 和 20∶1 的高斯白噪声。其含噪时间域响应和相应的反变换结果如图 3.19（见彩图）和图 3.20（见彩图）所示。



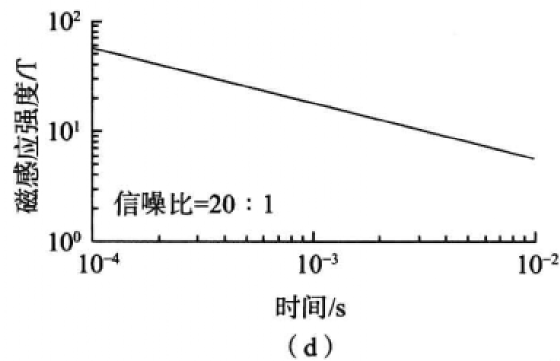

（a）

（b）

图 3.19　$U(\tau)=1$ 的含噪时间域响应

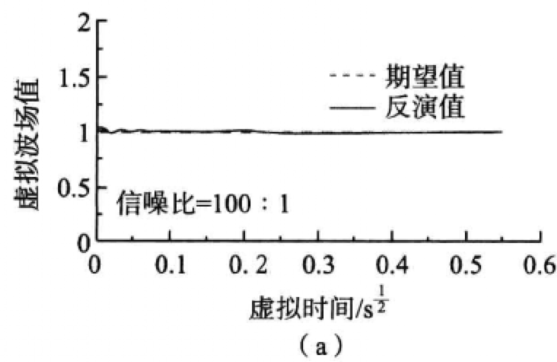



（c）

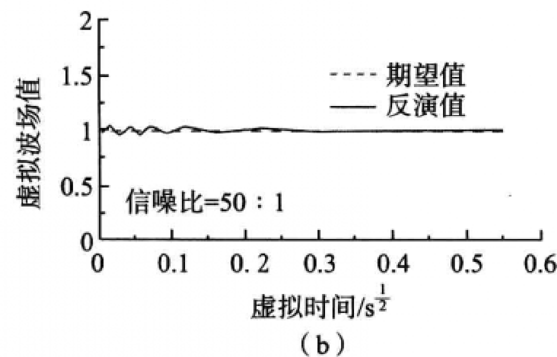



（d）

图 3.19　$U(\tau)=1$ 的含噪时间域响应（续）

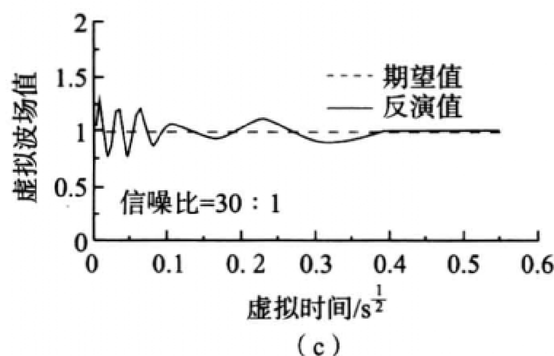



（a）

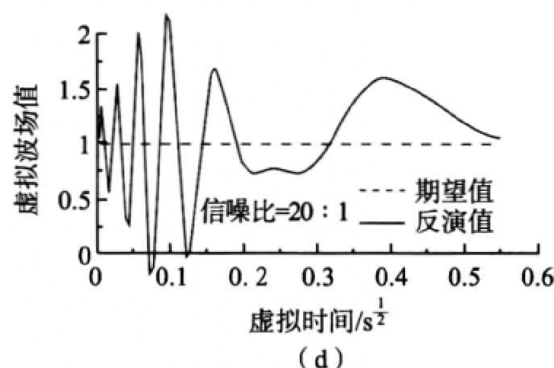



（b）

图 3.20　$U(\tau)=1$ 的含噪时间域响应反变换




（c）



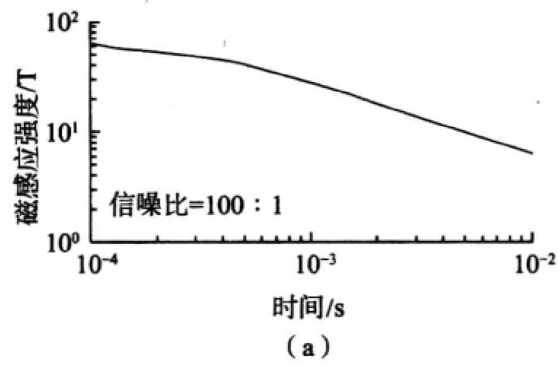

（d）

图 3.20　$U$（$\tau$）=1 的含噪时间域响应反变换（续）

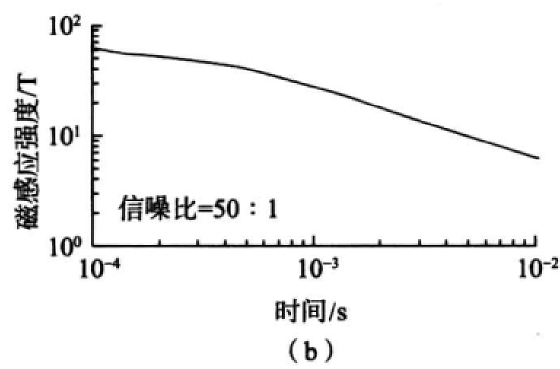
由图 3.19（d）可以明显看出噪声使得时间域响应曲线变得很不平滑。由图 3.20 的波场反变换结果来看，当信噪比为 50∶1 时，反演值与期望值吻合得还可以，当信噪比降低到 30∶1 和 20∶1 时，反演值波动剧烈，与期望值已相差甚远。

下面让虚拟波依次取高斯正向单脉冲、负向单脉冲、正向双脉冲、负向双脉冲、正负向双脉冲和负正向双脉冲六种不同的波形，含噪实验结果如图 3.21（见彩图）到图 3.32（见彩图）所示。

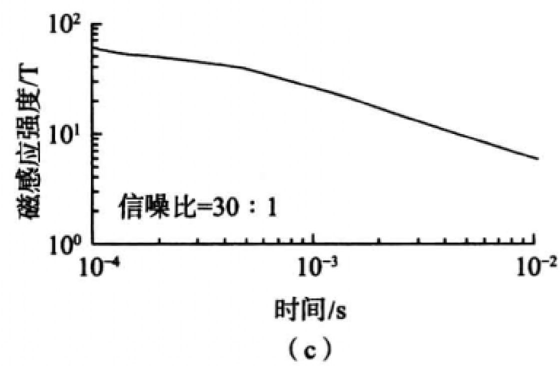
由图 3.22（见彩图）和图 3.24 可以看到，当信噪比高于 30∶1 时，含噪时间域响应的波场反变换曲线与期望曲线吻合得还可以，尤其是单峰的定位很准确。当信噪比进一步降低到 20∶1 时，波场反变换曲线出现强烈波动，严重干扰了单峰的识别。从图 3.21（见彩图）和图 3.23 可以看到信噪比为 20∶1 的时间域响应曲线很不光滑，干扰明显，可见在数据处理中光滑的重要性。



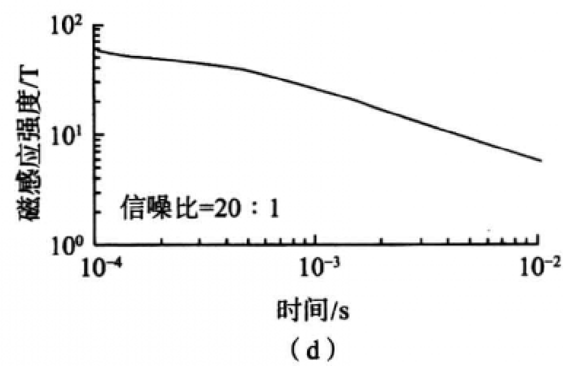
（a）



（b）

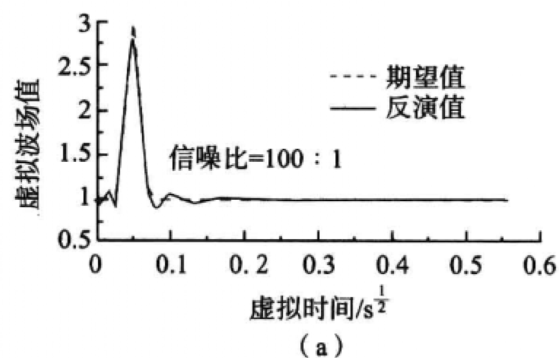


（c）

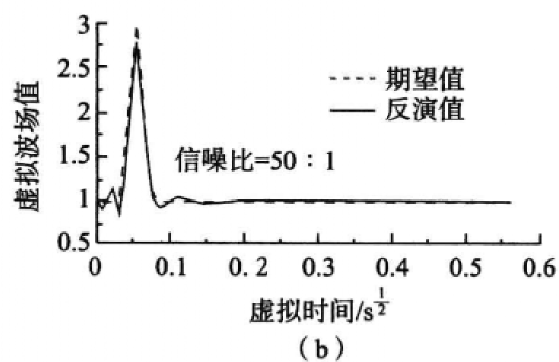


（d）

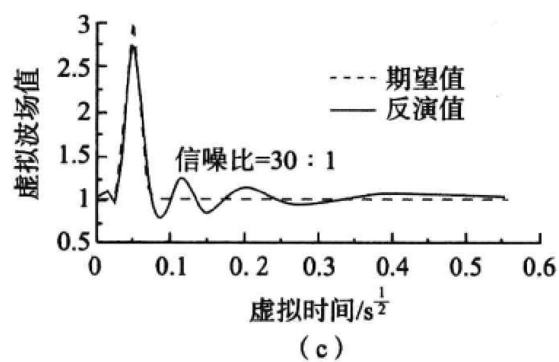
图 3.21　正向单脉冲的含噪时间域响应



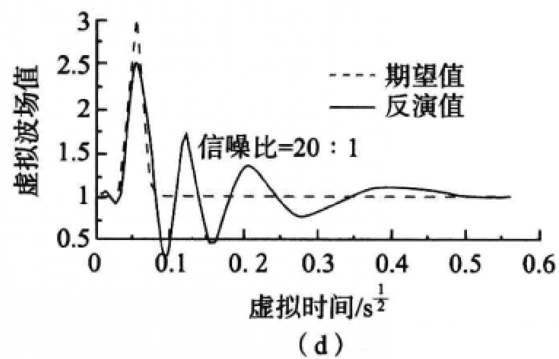
（a）



（b）

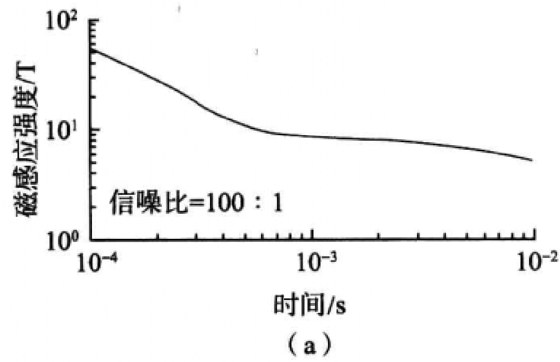


（c）

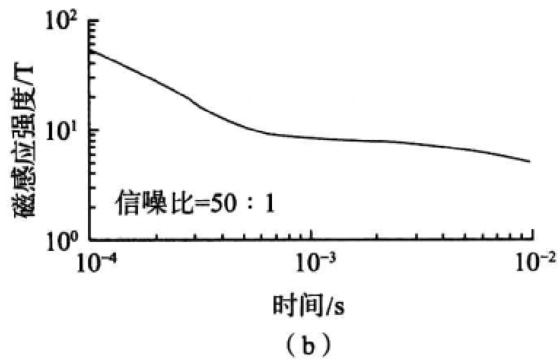


（d）

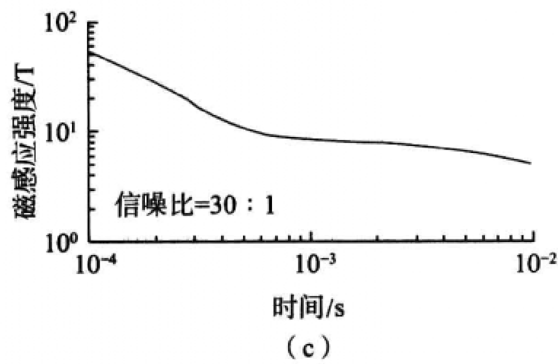
图 3.22　正向单脉冲含噪时间域响应反变换



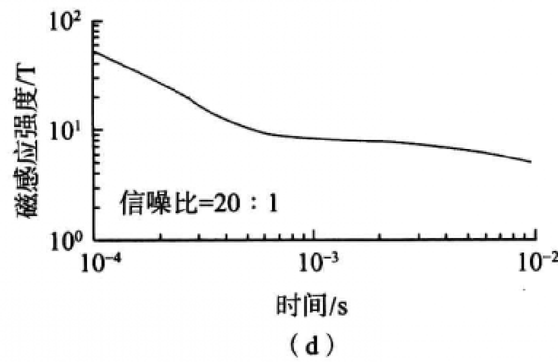

（a）




（b）

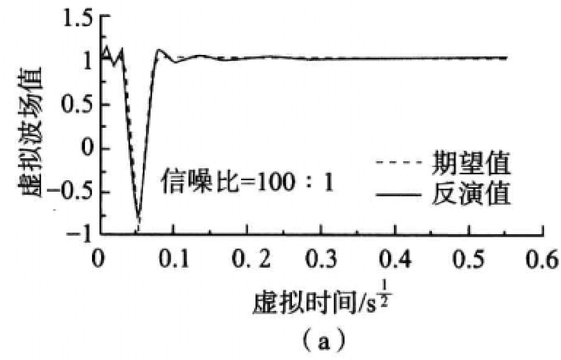



（c）

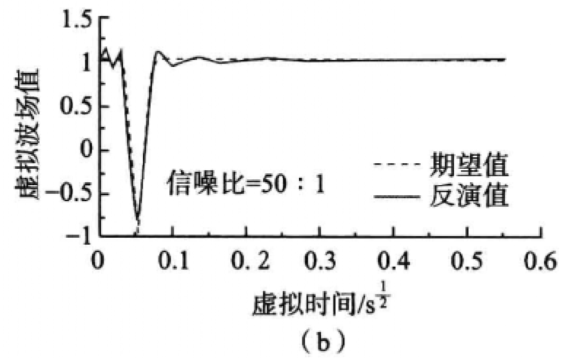



（d）

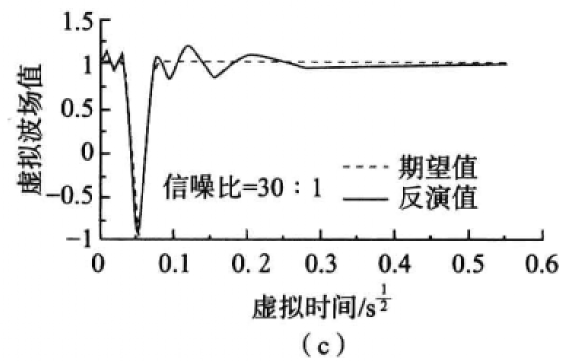
图 3.23　负向单脉冲的含噪时间域响应



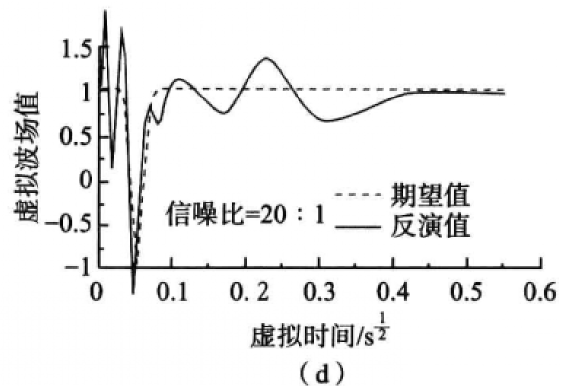

（a）




（b）

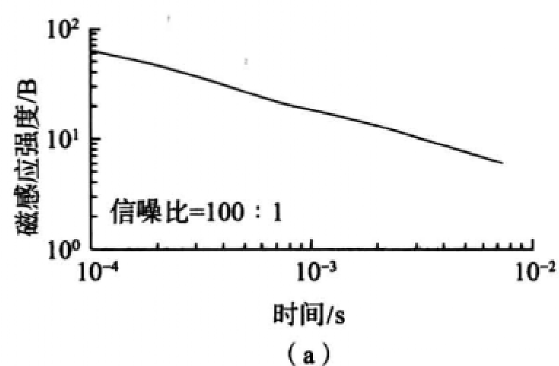



（c）

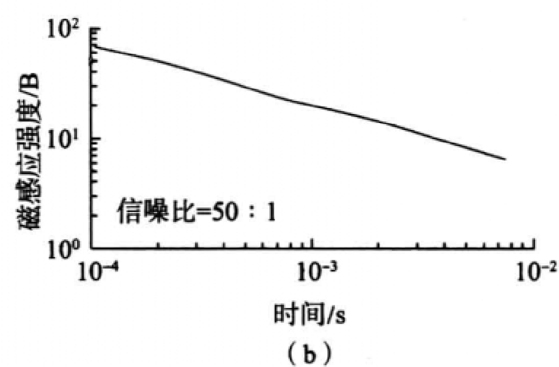



（d）

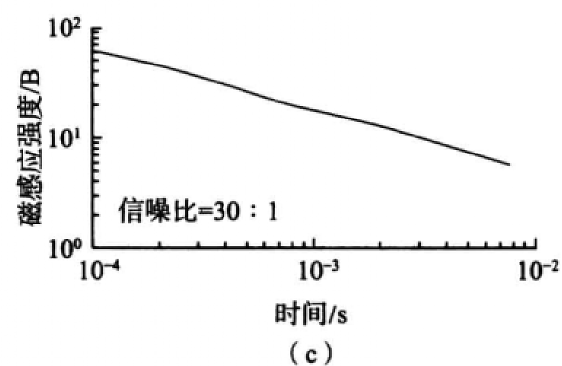
图 3.24　负向单脉冲含噪时间域响应反变换



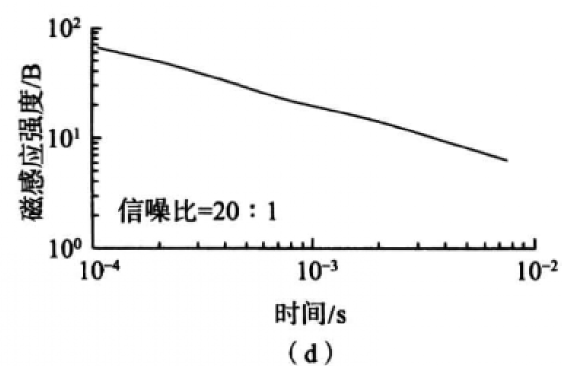
（a）



（b）

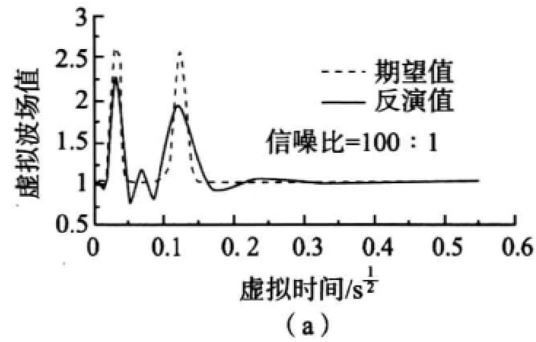


（c）

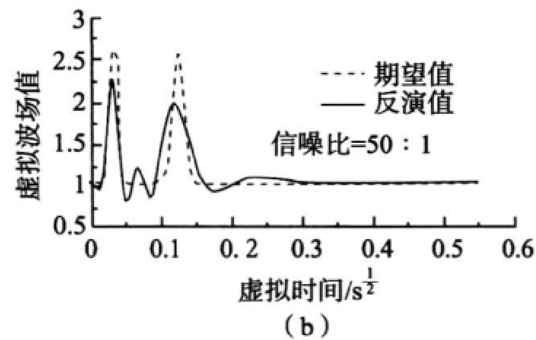


（d）

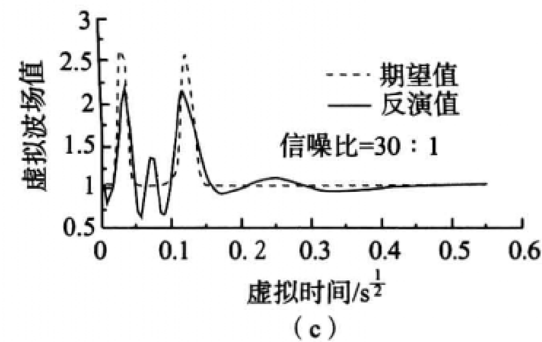
图 3.25　正向双脉冲的含噪时间域响应



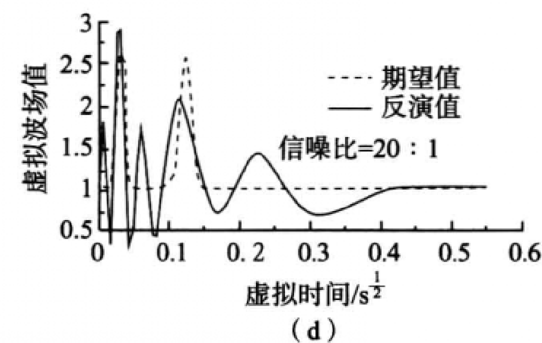
(a)



(b)



(c)

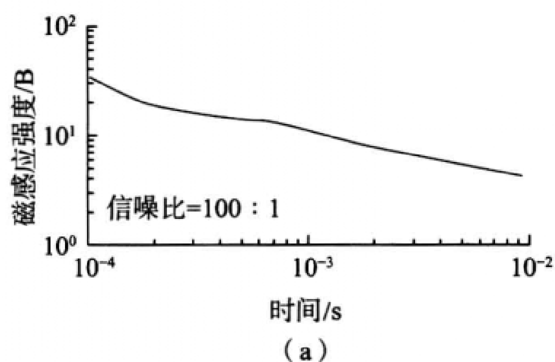


(d)

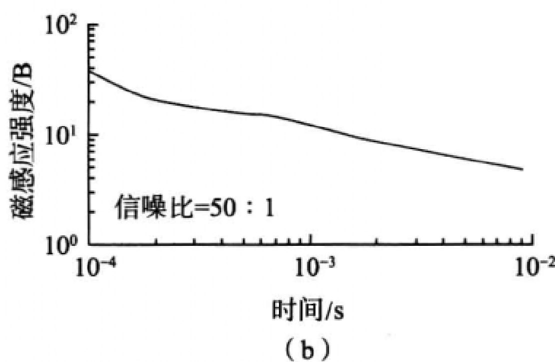
图 3.26　正向双脉冲含噪时间域响应反变换

由图 3.26（见彩图）可以看到，当信噪比为 30：1 时，波场反变换曲线的第一个峰值与期望峰值比较吻合，而第二个峰值吻合得不好。由于高斯白噪是

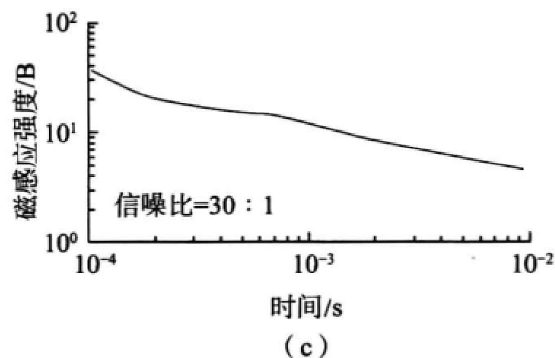
随机给的，每次反演的结果可能会有些不同。从图 3.28（见彩图）可以看到，当信噪比为 30∶1 时，波场反变换曲线的两个峰值吻合得都不错。但是由图 3.26 和图 3.28 可见，当信噪比降低到 20∶1 时，波场反变换曲线出现较多波动，干扰了两个单峰的识别。



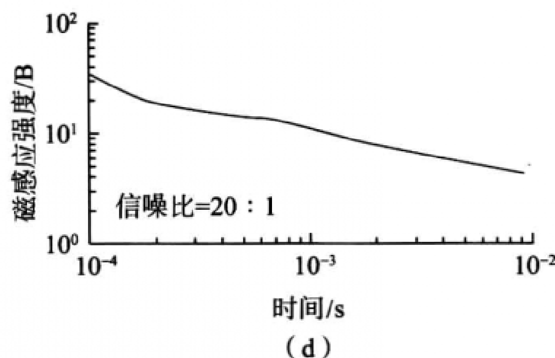

（a）




（b）

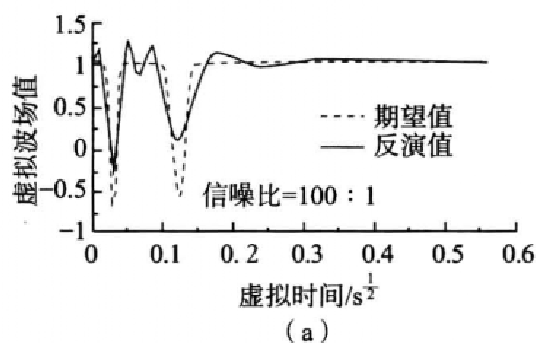



（c）

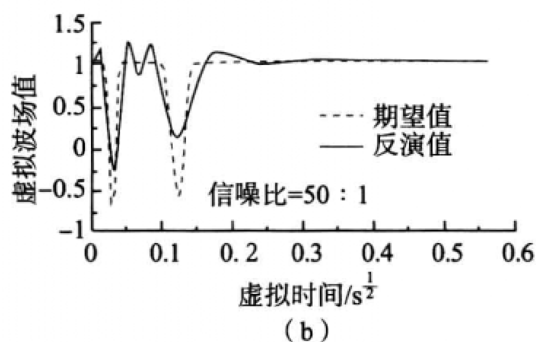



（d）

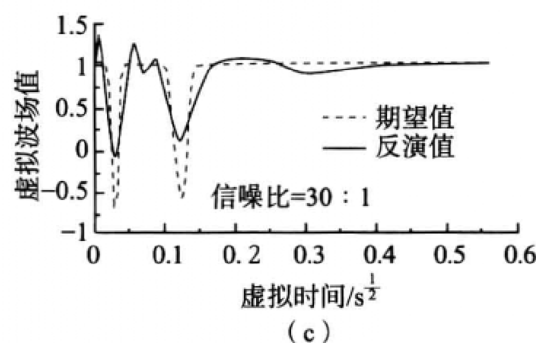
图 3.27　负向双脉冲的含噪时间域响应



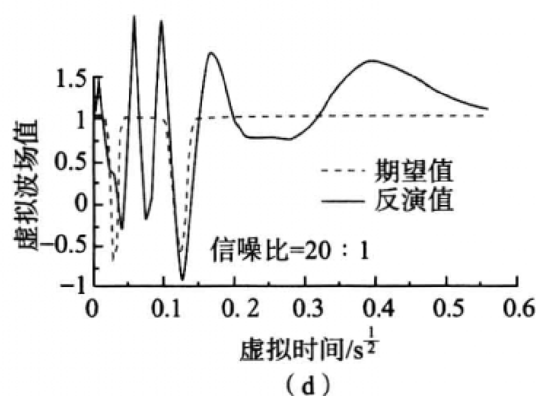
(a)



(b)



(c)

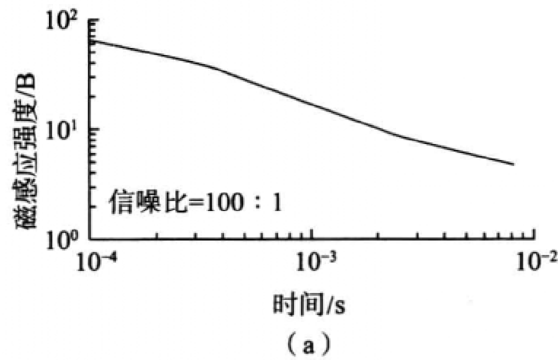


(d)

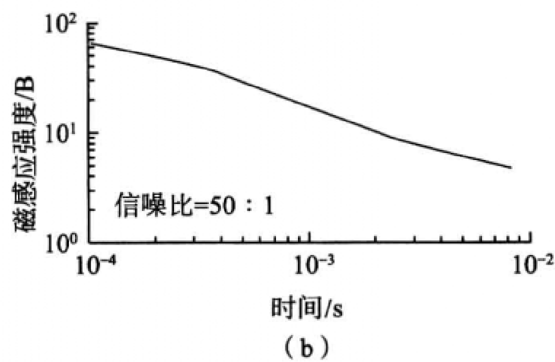
图 3.28　负向双脉冲含噪时间域响应反变换

由图 3.29（见彩图）和图 3.31（见彩图）可见，信噪比为 30：1 的时间域响应曲线已不太光滑，由图 3.29 和图 3.31 可见当信噪比降低到 20：1 时，时间域响应曲线“毛刺”明显。由图 3.30（见彩图）和图 3.32（见彩图）的

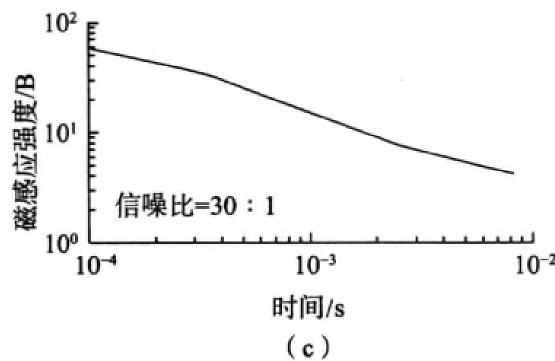
波场反变换图上可以看到，当信噪比不低于 30∶1 时，反演值与期望值吻合得很好，一正一负两个波峰定位很准确，但是当信噪比达 20∶1 时，波峰定位已不是很准确，而且波场反变换得到的曲线出现多个正负波峰，造成了假象。



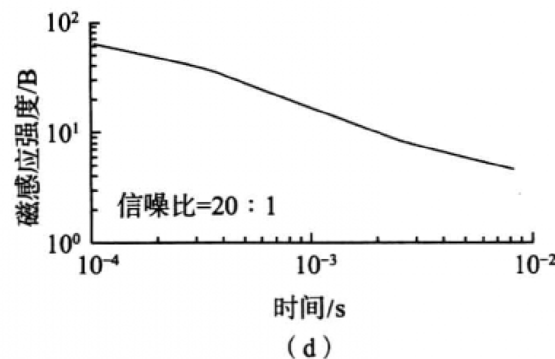
（a）



（b）

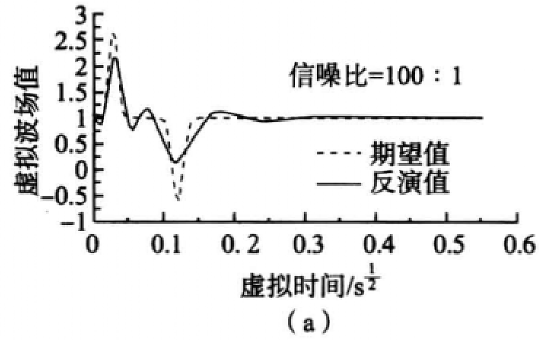


（c）

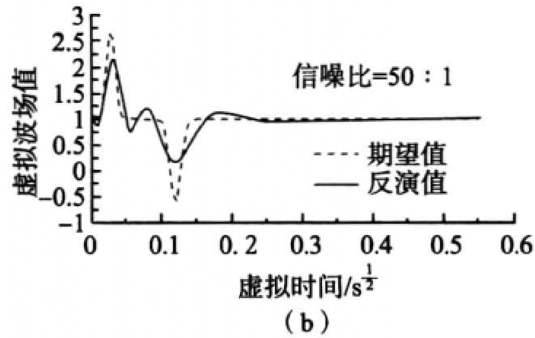


（d）

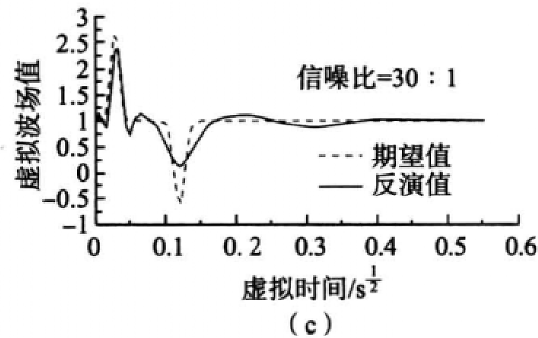
图 3.29　正负向双脉冲的含噪时间域响应



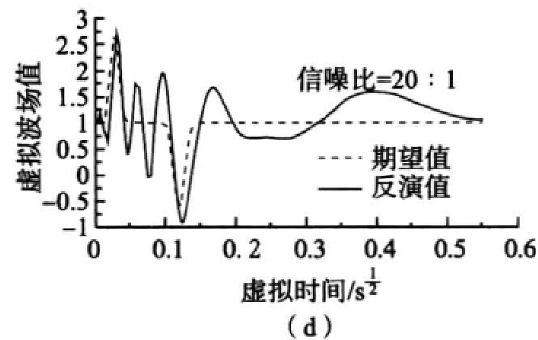

（a）




（b）




（c）

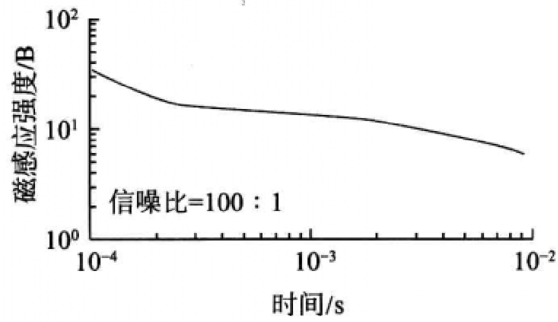



（d）

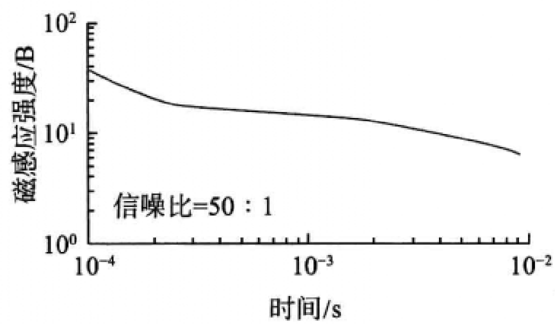
图 3.30　正负向双脉冲含噪时间域响应反变换

由于波场反变换所对应的系数矩阵条件数很大，使得方程组的求解很不稳定。右端项的微小扰动就可能严重影响求解结果。由噪声实验可见，当信噪比

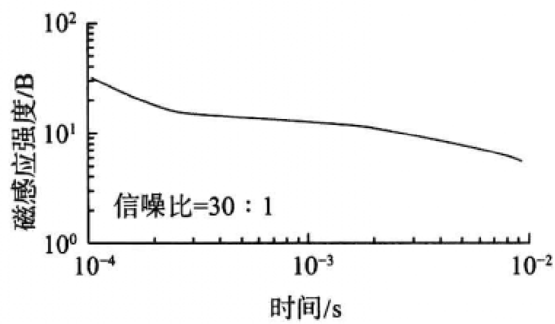
不低于 30：1 时，波场反变换曲线与波场期望曲线可以吻合得很好。



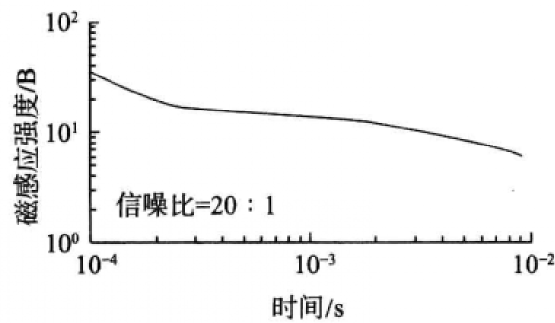
（a）



（b）



（c）



（d）

图 3.31　负正向双脉冲的含噪时间域响应

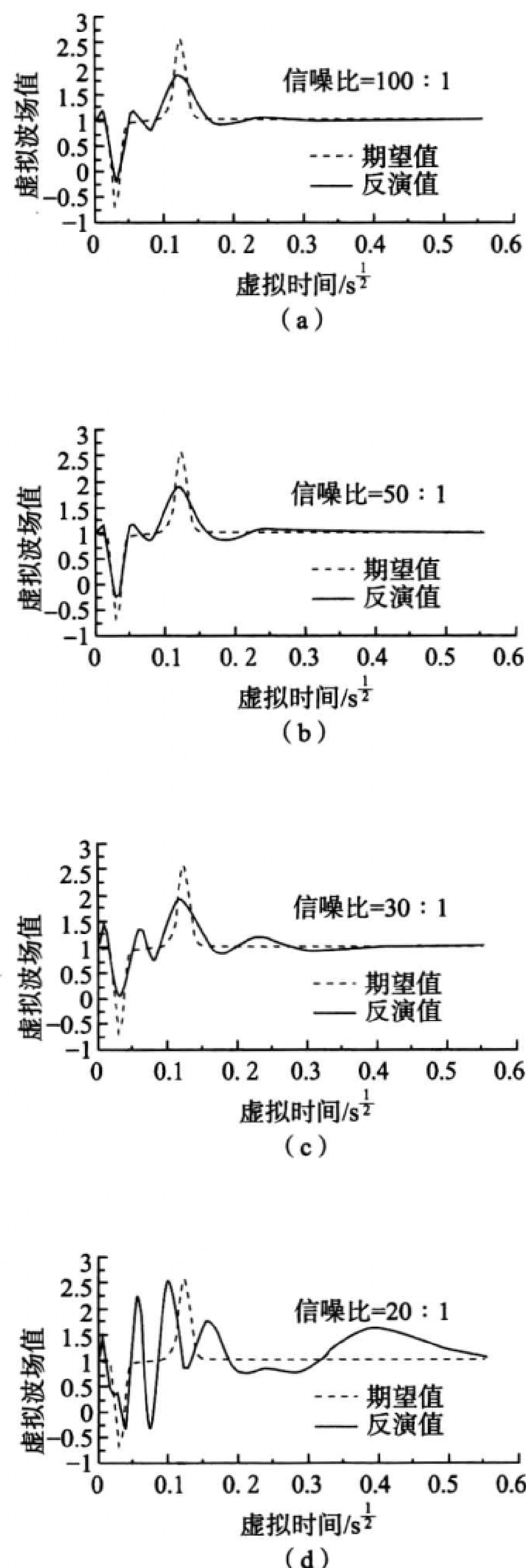



图 3.32　负正向双脉冲含噪时间域响应反变换

总体看来，波场反变换对时间域响应的测量精度要求是很高的，只有在保证测量精度的前提下进行波场反变换才有意义。

# 第 4 章　合成孔径算法与子波宽度压缩

## 4.1　合成孔径成像算法

瞬变电磁波场变换算法的提出，实现了由具有扩散特征的瞬变场向虚拟波场的转变，这就为实现航空瞬变电磁法的合成孔径成像创造了条件。瞬变电磁合成孔径成像技术是借用合成孔径雷达成像的思路，利用机载真实孔径发射线圈与目标的相对运动，把尺寸较小的真实天线孔径用数据处理的方法合成一个较大的等效孔径的发射线圈，使其分辨能力更高、穿透能力更强。对于航空瞬变电磁法而言其观测方式与机载合成孔径雷达十分相似，完全可以借助合成孔径雷达的成像思想，实现虚拟波场条件下的瞬变电磁合成孔径成像。

瞬变电磁场经过波场变换，已经把原来的感应场转换成了波场，每一点的数据相当于变成了自激自收的波动场。而前人已经通过实验分析确定瞬变电磁场在多激励源情况下存在场的相关叠加性，基于瞬变电磁场的上述特点，采用相关叠加的方法来进行合成孔径。其合成示意图如图 4.1 所示。

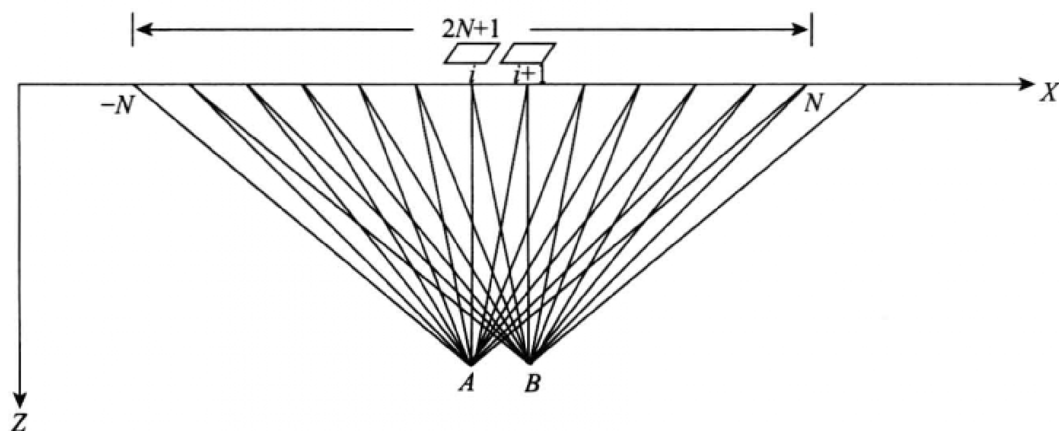



图 4.1　合成孔径示意图

首先选取一个中心点，取为第 $i$ 点，此点的波场值可表示为 $U(r_i, \tau)$，其中 $r_i$ 为 $i$ 点到 $-N$，…，$N$ 内某点的距离，$\tau$ 为相对时移量。然后选定 $2N+1$ 个测点的长度为合成孔径的长度，即选取 $i$ 点左右两侧从 $-N$ 到 $N$ 的测点分别与中心点做相关，其归一化的互相关系数为

$$\rho(r_i,\tau)=\frac{\sum_{j=1}^{m}U(r_i,t_j)U(r_{i+k},t_j-\tau)}{\left\{\sum_j[U(r_i,t_j)]^2\sum_j[U(r_{i+k},t_j)]^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{4.1}$$

式中，$m$ 为每一测点的时间道数。

互相关系数 $\rho(r_i,\ \tau)$ 表示了两列波场的相关程度，但它与相对时移量 $\tau$ 值有关，通过改变时移量 $\tau$ 值，找出最大相关系数 $\rho^{\max}$（$r_i$，$\tau^m$）对应的时移量值，称为最佳延时，记为 $\tau^m$。由此可以得到 $2N+1$ 个最大相关系数 $\rho^{\max}$（$r_k$，$\tau_k^m$）和最佳延时 $\tau_k^m$（$k=-N$，…，$-1$，0，1，…，$N$）。之后，把从相关计算得到的最大相关系数作为权系数，用权系数分别乘上各点的波场值，叠加到中心点，最终可得到中心点的合成值为

$$U'(r_i,t_j)=\sum_{k=-N}^{N}\rho^{\max}(r_k,\tau_k^m)U(r_k,t_j-\tau_k^m)\quad(j=1,2,\cdots,m) \tag{4.2}$$

在一条测线上依次移动，则可得到第 $i+1$，$i+2$，$i+3$，…个点为中心点的合成值。

以上是为了说明原理，只给出了剖面上的一维合成孔径算法，也可以推广到平面上的二维合成孔径计算，进一步还可以发展自聚焦算法等。

## 4.2　子波宽度压缩

虽然变换出来的波场在形式上与地震波场一样都满足波动方程，但是由于两种波场的物理背景不同，它们之间存在一些重要区别，前者是与感应的瞬变电磁衰减曲线相对应的“反射”子波，是虚拟的，而后者是在弹性介质中传播的客观存在的地震子波．另外，虚拟波场在每一种介质中的传播速度不仅与本介质的电导率有关，而且还受相邻介质电导率的影响，这与地震波场是不同的，并且存在严重的波形展宽效应，使得计算得到的虚拟波场数值分辨率降低，成为瞬变电磁法拟地震成像解释的主要障碍之一。显然，这一现象严重影响着 TEM 成像的空间分辨能力。所以，有必要讨论这种虚拟的波动场波形展宽的原因及对策。

以下首先给出了波形展宽的现象，然后讨论了虚拟波形展宽的原因，认为不是由于波在介质中传播时能量损耗所致，而是波场变换式中高斯分布的核函数随虚拟时间的增加分布范围增大的分布特点所决定的。最后对虚拟波场的离散数据求取反褶积，消除了波场变换的波形展宽效应。通过对理论模型计算处理，证明了该方法可以压缩子波的宽度，并增强瞬变电磁法识别地下电性分界面的能力。

### 4.2.1 波形展宽的现象

以三层地电断面为例进行波场变换，K 型断面地电参数为，$\rho_1=5\Omega\cdot\mathrm{m}$，$h_1=60\mathrm{m}$，$\rho_2=50\Omega\cdot\mathrm{m}$，$h_2=60\mathrm{m}$，$\rho_3=5\Omega\cdot\mathrm{m}$。A 型断面地电参数为，$\rho_1=5\Omega\cdot\mathrm{m}$，$h_1=60\mathrm{m}$，$\rho_2=50\Omega\cdot\mathrm{m}$，$h_2=60\mathrm{m}$，$\rho_3=500\Omega\cdot\mathrm{m}$。Q 型断面地电参数为，$\rho_1=25\Omega\cdot\mathrm{m}$，$h_1=60\mathrm{m}$，$\rho_2=5\Omega\cdot\mathrm{m}$，$h_2=60\mathrm{m}$，$\rho_3=1\Omega\cdot\mathrm{m}$。图 4.2 为以上三个模型的波场变换结果，对三个模型的变换结果进行分析，其共同的特点就是波形较宽，正负脉冲之间的时间间隔较大，导致该方法在拟地震成像处理中对电性界面的分辨能力下降。

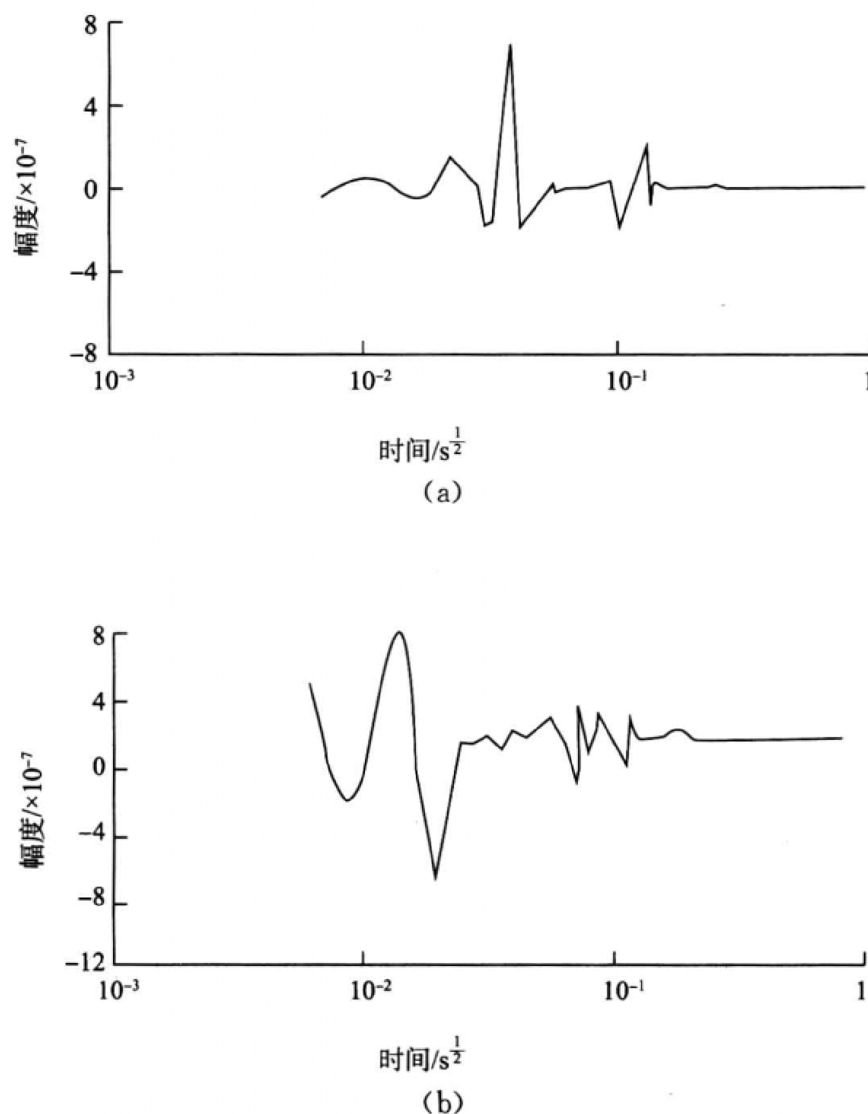
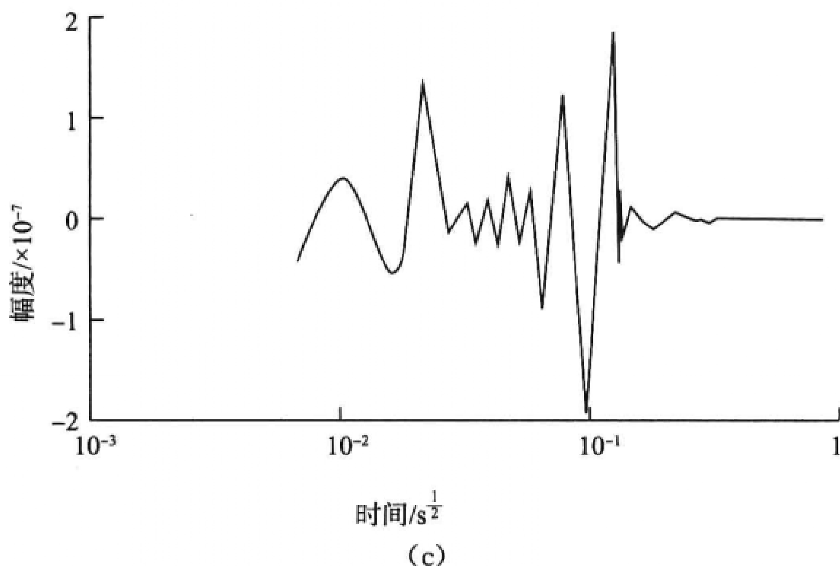



图 4.2 地电模型的波场变换结果

(a) K 型断面的波场变换结果；(b) Q 型断面的波场变换结果；(c) A 型断面的波场变换结果




(c)

图4.2　地电模型的波场变换结果（续）

### 4.2.2　波形展宽的原因

在瞬变电磁场转化为虚拟波场的过程中，所得虚拟波场波形会随着时间的增大而不可避免地展宽，严重影响成像的分辨率。原因在于波场变换式（1.3）中核函数

$$a(t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\tau \mathrm{e}^{-\tau^2/4t} \tag{4.3}$$

的特点，即高斯分布的核函数以真实的物理时间为方差，因此随着时间的增加，时域场结束的时间越滞后，波场波形也就越宽阔。尽管这一现象是由数学变换产生的，但是与地震勘探中的“大地滤波作用”非常相似。从滤波角度看，要提高分辨率抵消大地滤波器的作用，求取一个反滤波因子，令其能抵消大地滤波的作用，则分辨率即可大幅提高。而这可以通过反褶积运算来完成。它经过理论和实践的证明完全可以把先前得到展宽的波场能量集中化，达到精细分层的效果。为了说明核函数的分布宽度随时间增大而增大，按照式（2.22），分别计算 $t=80\mu$s、325$\mu$s、800$\mu$s、2.1ms、8.7ms、27ms、81ms 时核函数值随虚拟时间 $\tau$ 变化时的分布形态。

由图4.3可见，$t=80\mu$s 时，核函数对应的 $\tau$ 值的最大取值范围为 $0\sim0.05\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}$；$t=325\mu$s 时，核函数对应的 $\tau$ 值的最大取值范围为 $0\sim0.1\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}$；$t=800\mu$s 时，核函数对应的 $\tau$ 值的最大取值范围为 $0\sim0.15\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}$；$t=2.1$ms 时，核函数对应的 $\tau$ 值的最大取值范围为 $0\sim0.25\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}$；$t=8.7$ms 时，核函数对应的 $\tau$ 值的最大取值范围为 $0\sim0.5\mathrm{s}^{\frac{1}{2}}$；$t=27$ms 时，核函数对应的 $\tau$ 值的最大取值范

围为 0～0.85$s^{\frac{1}{2}}$；$t$＝81ms 时，核函数对应的 $\tau$ 值的最大取值范围为 0～1.5$s^{\frac{1}{2}}$。随着时间 $t$ 的推移，核函数 $a$（$t$，$\tau$）随虚拟时间 $\tau$ 的增加分布范围明显增大，这就导致经反变换获得的虚拟波场出现了随着时间的推移而展宽的现象。

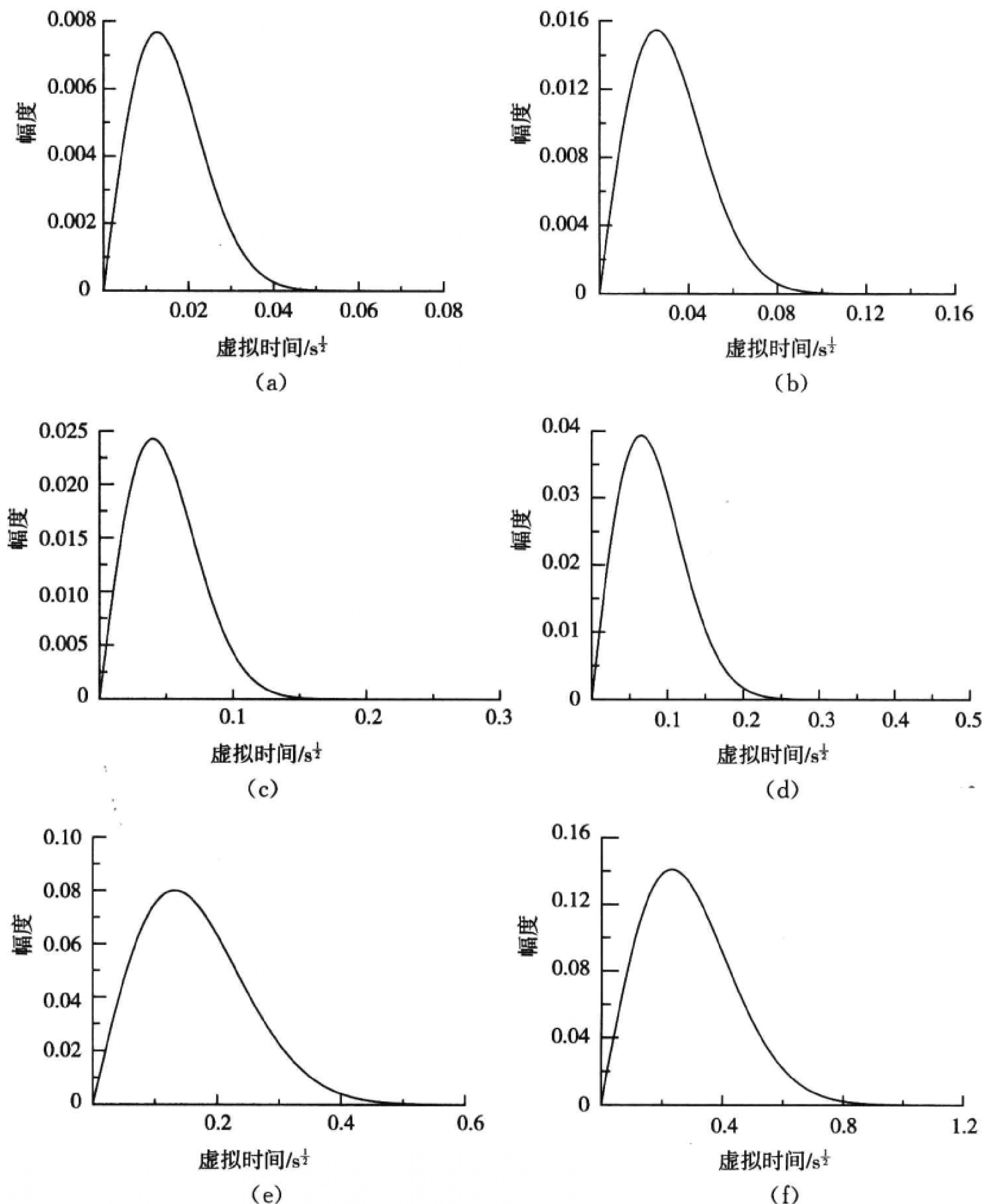
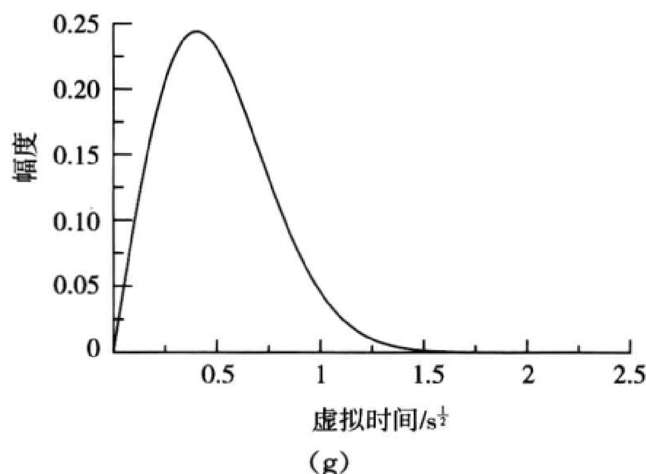



图 4.3　核函数值分布性态

（a）$t$＝80μs 时核函数值分布；（b）$t$＝325μs 时核函数值分布；（c）$t$＝800μs 时核函数值分布；（d）$t$＝2.1ms 时核函数值分布；（e）$t$＝8.7ms 时核函数值分布；（f）$t$＝27ms 时核函数值分布；（g）$t$＝81ms 时核函数值分布




(g)

图 4.3　核函数值分布性态（续）

表 4.1 列出了不同时间的核函数分布情况的统计，由表 4.1 可以看出，时间越大，核函数分布的范围越大，说明随时间的推移，由于核函数分布的范围加大，导致虚拟波的宽度加大。

**表 4.1　核函数值分布性态（范围）统计**

| 序号 | 时间 $t$ | 虚拟时间 $\tau$ 范围/$s^{\frac{1}{2}}$ | 虚拟时间 $\tau$ 宽度/$s^{\frac{1}{2}}$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 80μs | 0～0.05 | 0.05 |
| 2 | 325μs | 0～0.1 | 0.1 |
| 3 | 800μs | 0～0.15 | 0.15 |
| 4 | 2.1ms | 0～0.25 | 0.25 |
| 5 | 8.7ms | 0～0.5 | 0.5 |
| 6 | 27ms | 0～0.85 | 0.85 |
| 7 | 81ms | 0～1.5 | 1.5 |

另外，在自由空间中，电磁波的波速为 $c_0=1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$，而导电媒质中的虚拟波速为 $v=1/\sqrt{\mu_0\sigma}$。两者相差约 6 个数量级。由于导电媒质中的虚拟波速非常慢，这样，传播同样的距离差，就需要更多的时间。所以，其波形的展宽效应就变得很显著了。

### 4.2.3　利用反褶积技术压缩波场宽度

波形展宽这一现象与地震勘探中的"大地滤波作用"非常相似。在地震勘探中，由于大地滤波的作用，加上噪声和多次波的叠加，使本来可以清晰呈现出的地层层序尖脉冲序列"模糊化"，降低了地层的纵向分辨率。反褶积的作用就是压缩子波，可以通过求取一个反滤波因子，令其能抵消大地滤波的作用，可以把先前得到展宽的波场能量集中化，达到精细分层的效果，这样分辨

率可望大幅提高。

Peacock 和 Treitel 在 1969 年提出预测反褶积，此项技术在地震资料处理中得到了非常广泛地应用。这项技术同样可以用来处理转换出来的虚拟地震子波。

假设 $y(t)$ 为实际转换出来的拟地震子波，$y(t)=(y(0), y(1), \cdots, y(n))$，我们希望通过一个滤波因子 $h(t)=(h(-m_0), h(-m_0+1), h(-m_0+2), \cdots, h(-m_0+m))$，$h(t)$ 的起始时刻为 $-m_0$，其延续长度为 $(m+1)$，进行如下计算

$$\hat{y}_i(t+a)=\sum_{t=1}^{n}h(t)y_i(n-t) \tag{4.4}$$

然后，得到延迟时刻 $a$ 后的子波 $\hat{y}(t+a)$，并且使该时刻拟地震子波与计算误差值 $Q$ 最小，即

$$Q=[y(t+a)-\hat{y}(t+a)]^2 \tag{4.5}$$

把式（4.5）代入式（4.6），得

$$Q=\sum_{i=1}^{m}\Big[y_i(t+a)-\sum_{t=1}^{n}h(t)y_i(t-a)\Big]^2 \tag{4.6}$$

要使 $Q$ 为最小，数学上就是求 $Q$ 的极值问题。将 $Q$ 对滤波因子求偏导，化简，并令其为零，即

$$\frac{\partial Q}{\partial h(t)}=0 \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial h(t)}&=\sum_{t=-m_0}^{-m_0+m+n}\frac{\partial}{\partial a(l)}\Big[\sum_{\tau=-m_0}^{-m_0+m}a(\tau)b(t-\tau)-d(t)\Big]^2\\&=2\sum_{t=-m_0}^{-m_0+m+n}\Big[\sum_{\tau=-m_0}^{-m_0+m}a(\tau)b(t-\tau)-d(t)\Big]b(t-l)\\&=2\sum_{t=-m_0}^{-m_0+m}h(\tau)\sum_{\tau=-m_0}^{-m_0+m+n}y(t-\tau)y(t-l)-2\sum_{t=-m_0}^{-m_0+m+n}\hat{y}(t)y(t-l)=0\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$(l=-m_0,\ -m_0+1,\ \cdots,\ -m_0+m)$$

式中，$\sum_{t=-m_0}^{-m_0+m+n}y(t-\tau)y(t-l)=r_{\mathrm{bb}}(l-\tau)$ 是虚拟子波的自相关项，而 $\sum_{t=-m_0}^{-m_0+m+n}\hat{y}(t)y(t-l)=r_{\mathrm{db}}(l)$ 是子波与期望输出的互相关项，所以方程（4.8）可写成

$$\sum_{\tau=-m_0}^{-m_0+m}h(\tau)r_{\mathrm{bb}}(l-\tau)=r_{\mathrm{db}}(l)\quad(l=-m_0,-m_0+1,\cdots,-m_0+m) \tag{4.9}$$

将式（4.9）成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} r_{bb}(0) & r_{bb}(l) & \cdots & r_{bb}(0) \\ r_{bb}(l) & r_{bb}(0) & \cdots & r_{bb}(m-l) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{bb}(m) & r_{bb}(m-1) & \cdots & r_{bb}(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(-m_0) \\ h(-m_0+1) \\ \vdots \\ h(-m_0+m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{bd}(-m_0) \\ r_{bd}(-m_0+1) \\ \vdots \\ r_{bd}(-m_0+m) \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

通过解方程（4.9），求出反褶积因子 $h(t)$ 后，就可以通过式（4.4），求出转换虚拟波所对应的反褶积处理计算结果。

反滤波算子的长度原则上可以任意选择。地震中反滤波算子的长度一般选择 80ms、120ms、160ms、200ms、240ms 等，但我们在计算时要将它们换算为采样点数。要根据插值后数据的总个数来进行选择，当达到一定长度时，反褶积效果趋于稳定。在本文的计算中，反滤波算子的长度基本选取在 400 到 600 之间。

### 4.2.4　模型计算

图 4.4 为运用了反褶积技术的结果，图 4.4（a）是反褶积处理前的波形，在反射界面处虚拟反射波波形明显较宽，分辨力下降；图 4.4（b）反褶积处理后波形，出现两组虚拟反射波，波形相对较窄，由图可见，通过反褶积处理，可以将电性分界面处产生的被拉长的虚拟反射波锐化，使瞬变电磁法的分辨能力有较大的提高。

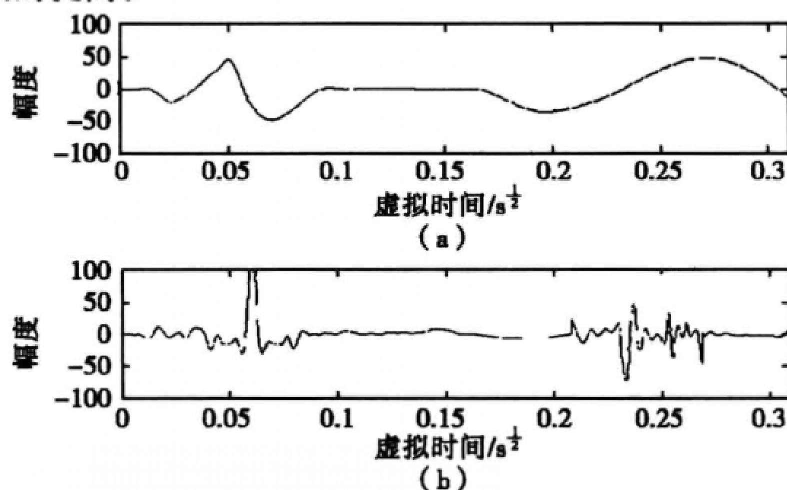
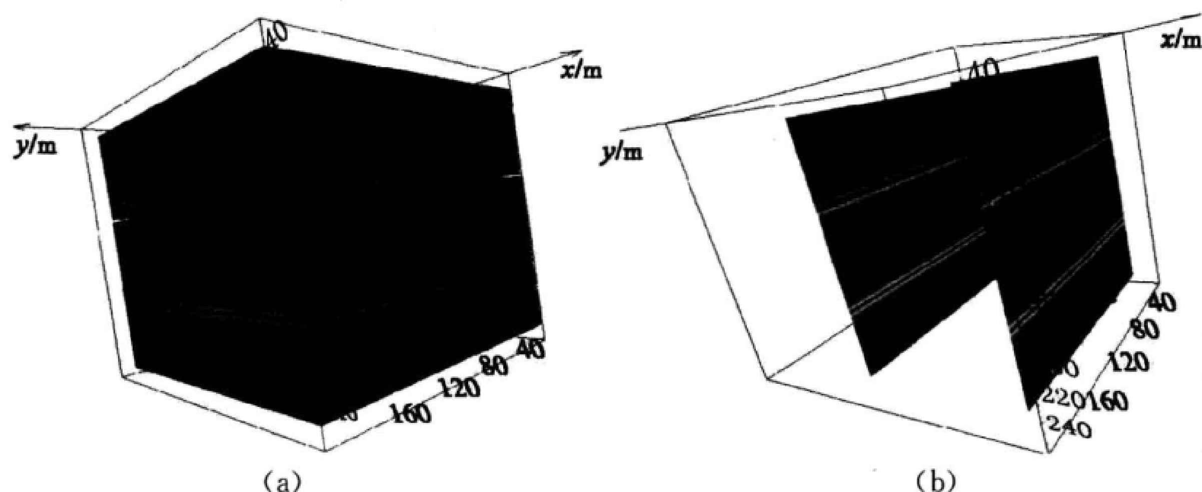



图 4.4　反褶积计算前后的 H 型模型子波对比

（a）压缩前子波波形；（b）压缩后子波波形

H 型模型参数：$\rho_1=\rho_3=100\Omega\cdot m$，$\rho_2=5\Omega\cdot m$，$h_1=h_2=100m$

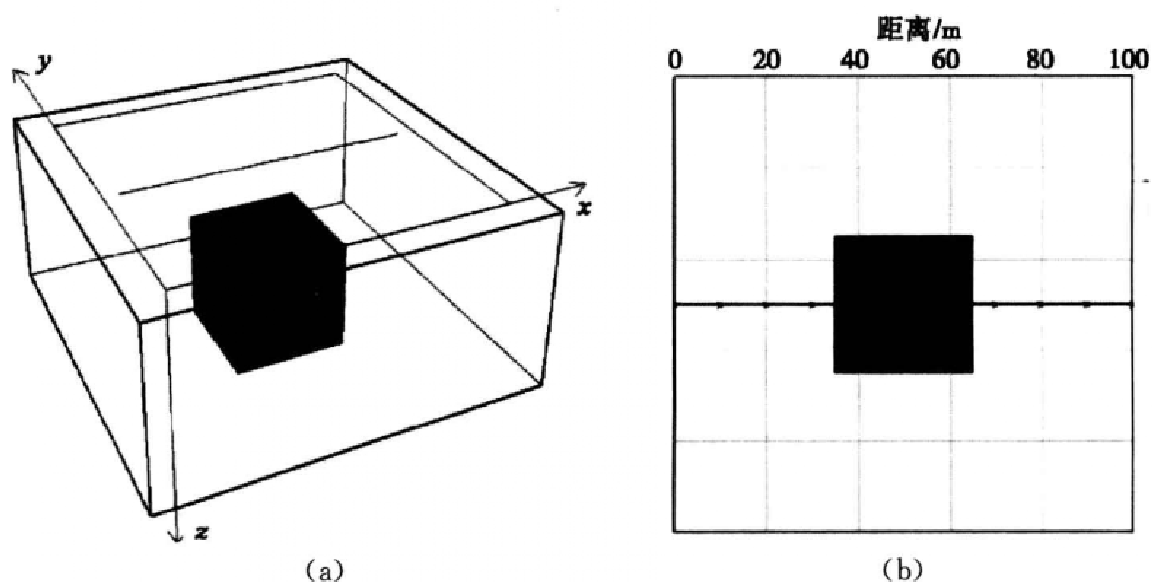
为了验证反褶积的处理效果，将对图 4.4 中地电模型的反褶积处理后的虚拟波场进行拟地震成像，图 4.5（见彩图）给出了 H 型模型的成像的结果，理论上，地电模型的两个电性界面分别位于地下 100m 和 200m 处。由图 4.5 可知，浅层电性界面所产生的波场能量集中于 100m 左右，而较深界面能量高峰产生于 190m 到 200m 之间。说明在界面深度定位方面与模型预先给定情况大体一致，效果已令人满意。




(a)　　　　(b)

图 4.5　H 型模型拟地震成像图

(a) H 模型成像图；(b) H 模型成像切片图

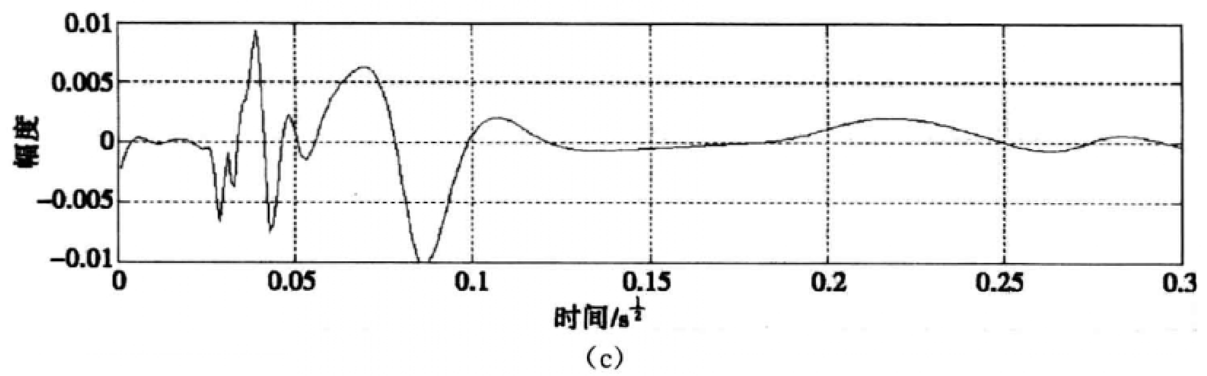



(a)　　　　(b)

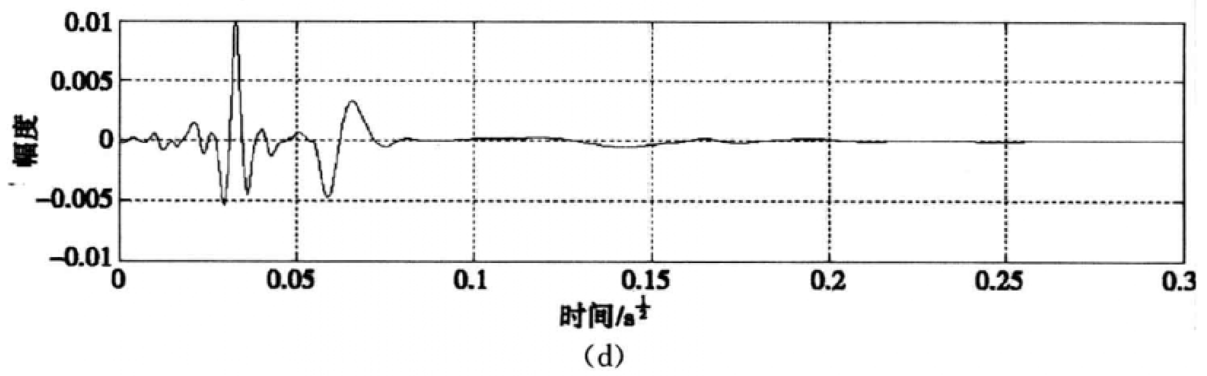
图 4.6　反褶积计算前后三维模型子波对比

(a) 三维地电模型；(b) 计算场点平面分布；(c) 压缩前子波波形；

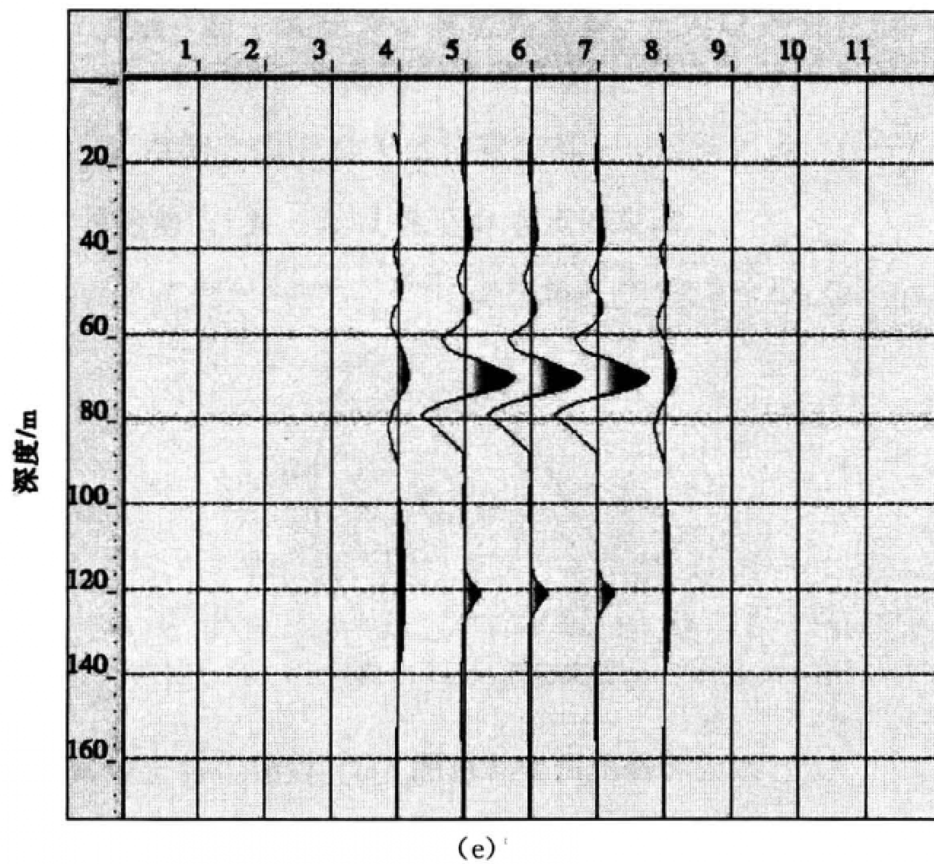
(d) 压缩后子波波形；(e) 拟地震成像剖面




(c)




(d)




(e)

图 4.6　反褶积计算前后三维模型子波对比（续）

为了验证反褶积的处理效果，我们设计了三维地电模型，取均匀半空间的电阻率为 $\rho_1=10\Omega\cdot m$。异常体为 30m×30m×50m 的块体，电阻率为 $\rho_2=300\Omega\cdot m$，埋深为 70m。

从图 4.6（见彩图）中可以看到，经反滤波处理后，波形得到锐化，上部波形能量集中在 70m 处，下部波形能量集中在 120m 处，与模型设置吻合得很好。特别是下部从高阻到低阻的界面，本身是弱反射面，波形展宽很严重，经反褶积后，波形得到了锐化。

# 第5章　瞬变电磁场拟波动方程三维曲面延拓成像

前面我们已经解决了瞬变电磁场的波场变换问题，并通过实验研究证明了多孔径瞬变电磁场确实存在相关叠加的波场性，这就为瞬变电磁场的偏移成像创造了条件。但瞬变电磁场偏移成像问题与地震勘探中的弹性波偏移成像问题有相似之处但也不完全相同，如果将扩散的瞬变电磁场变换为波场处理，将波场分析的原理，即地震波场从地面向地下反向外推进行偏移成像的方法用于对瞬变电磁场的解释，形成瞬变电磁偏移方法。也就是用基尔霍夫积分法进行电磁波场偏移成像处理，实现电磁波场的延拓计算，这是目前瞬变电磁测深方法研究的焦点和前沿课题。本章对该方法进行了探索性的研究，分为三节内容。

## 5.1　基尔霍夫绕射积分的建立

如图5.1所示，取一区域 $W$，其边界为 $Q$，$\boldsymbol{n}$ 为 $Q$ 的外法线，设在 $t$ 时刻，$M$（$x_1$，$y_1$，$z_1$）点上观测到的势函数为 $\varphi$（$x_1$，$y_1$，$z_1$，$t$），则在前一时刻 $t_1=t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}$，在闭合曲面 $Q$ 上的位移势是 $\varphi\left(x_1, y_1, z_1, t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}\right)=[\varphi]$，称［$\varphi$］为“推迟势”，而 $r$ 为 $M$ 点至 $Q$ 各点的距离

$$r=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}$$

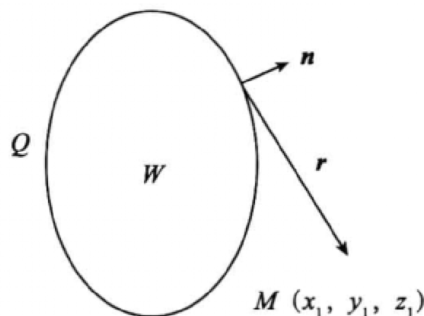



图5.1　区域与边界

为了计算 $Q$ 上各位移势［$\varphi$］的总和要引用格林公式

$$\int_W (u\,\nabla^2 v - v\,\nabla^2 u)\mathrm{d}w = \oint_Q \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}Q \tag{5.1}$$

式中，$u$ 和 $v$ 为任意函数，取

$$u=\varphi(x,y,z,t-\frac{\boldsymbol{r}}{v})=[\varphi]$$

因为需要由 $t$ 的前一时刻 $t_1=t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}$ 的推迟势 $[\varphi]$ 来确定 $\varphi$ 的解。取 $v=\frac{1}{r}$，由于 $\varphi=\frac{1}{v}C_1\left(t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}\right)$，$\frac{1}{r}$是 $\varphi$ 的基本解，因此子波的球面扩散取决于$\frac{1}{r}$。考虑式（5.1）的左端

$$u\,\nabla^2 v=[\varphi]\,\nabla^2(\frac{1}{r})$$

由于

$$\nabla^2(\frac{1}{r})=0$$

式中，$\frac{1}{r}$是拉普拉斯方程的解，故 $u\,\nabla^2 v=0$，所以式（5.1）变为

$$-\int_W \frac{1}{r}\,\nabla^2[\varphi]\mathrm{d}w=\oint_Q\left[[\varphi]\,\frac{\partial}{\partial n}(\frac{1}{r})-\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial n}\cdot\frac{\partial[\varphi]}{\partial r}\right]\mathrm{d}Q$$

考虑到$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}$所以上式变为

$$\int_W \frac{1}{r}\,\nabla^2[\varphi]\mathrm{d}w=\oint_Q\left[\frac{[\varphi]}{r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial n}\cdot\frac{\partial[\varphi]}{\partial r}\right]\mathrm{d}Q \tag{5.2}$$

上式左边的被积函数$\nabla^2[\varphi]=[\nabla^2\varphi]$ 而

$$[\nabla^2\varphi]=[\nabla\cdot\nabla\varphi]=[\nabla\cdot\boldsymbol{E}] \tag{5.3}$$

式中，

$$\boldsymbol{E}=\nabla\varphi,\quad \varphi=\frac{1}{r}C_1(t-\frac{\boldsymbol{r}}{v})$$

所以，有

$$[\nabla^2\varphi]=[\theta]$$

式中，$[\theta]$ 表示在 $t_1=t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}$时刻的激发源的体积相对变化，而且根据激发源强度函数的定义，式（5.2）左边的体积分表示的就是激发源的强度。格林公式右边曲面积分内的两项，是由于激发源作用后在 $Q$ 面上的解．不过此时该 $Q$ 面上的解作为二次子波的新激发源，因此对 $Q$ 面作面积分实际上是求这些作为新激发源的二次子波在 $Q$ 面上的总和，于是式（5.3）所描述的意义是：被 $Q$ 曲面包围的 $W$ 区域内，在时刻 $t_1=t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}$，一次震源所产生的能量应该等于此时此刻 $Q$ 面上产生的二次子波的总和。因此求某一点上由激发源引起的位移势的解，式（5.2）的意义是关键。下面建立用 $[\varphi]$ 及其导数表示的积分公式。

1. 复合函数求导法

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(x,y,z,t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t_1}\right)\varphi\left(x,y,z,t-\frac{\boldsymbol{r}}{v}\right)$$

当 $t=t_1$ 时，上式变为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=[\frac{\partial\varphi}{\partial x}]-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial x}[\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}] \tag{5.4}$$

同样有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=[\frac{\partial\varphi}{\partial n}]-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial n}[\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}](\partial t_1=\partial t) \tag{5.5}$$

2. 求 $\nabla^2 u$

由于

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

由式（5.4）可求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\varphi}{\partial x}]-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]-\frac{1}{v}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}] \tag{5.6}$$

由于

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\varphi}{\partial x}]=(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t})\cdot[\frac{\partial\varphi}{\partial x}]=[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}]-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\,\partial x}]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]=(\frac{\partial}{\partial x}-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial t})[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]=[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}]-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial x}\cdot[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]$$

代入式（5.6）得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}]-\frac{2}{v}\frac{\partial r}{\partial x}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}]+\frac{1}{v^2}(\frac{\partial r}{\partial x})^2[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]-\frac{1}{v}\frac{\partial^2 r}{\partial t^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]$$

同理得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}]-\frac{2}{v}\frac{\partial r}{\partial y}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}]+\frac{1}{v^2}(\frac{\partial r}{\partial y})^2[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]-\frac{1}{v}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}]-\frac{2}{v}\frac{\partial r}{\partial z}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}]+\frac{1}{v^2}(\frac{\partial r}{\partial z})^2[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]-\frac{1}{v}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]$$

于是有

$$\nabla^2 u=[\nabla^2\varphi]-\frac{2}{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial r}{\partial W_i}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial W_i\,\partial t}]+\frac{1}{v^2}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]\sum_{i=1}^{3}[\frac{\partial r}{\partial W_i}]^2-\frac{1}{v}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2 r}{\partial W_i{}^2} \tag{5.7}$$

式中，$W_1=x$，$W_2=y$，$W_3=z$。由于 $r^2=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2$，我们得到

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x-x_1}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y-y_1}{r},\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z-z_1}{r}$$

所以

$$\sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial r}{\partial W_i})^2=(\frac{x-x_1}{r})^2+(\frac{y-y_1}{r})^2+(\frac{z-z_1}{r})^2=1$$

$$\sum_{i=1}^{3}(\frac{\partial^2 r}{\partial W_i{}^2})=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial r}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial r}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial r}{\partial z})=\frac{2}{r}$$

此外，考虑到波动方程

$$\nabla\varphi=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+F(x,y,z,t)$$

将以上各式代入方程（4.7）合并同类项，得

$$\nabla^2 u=\frac{2}{v^2}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]-\frac{2}{vr}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]-\frac{2}{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial r}{\partial W_i}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial W_i\partial t}]+F \tag{5.8}$$

于是格林公式左端被积函数$\frac{1}{r}\nabla^2 u$可写成

$$\frac{1}{r}\nabla^2 u=\frac{2}{v^2 r}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]-\frac{2}{vr^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]-\frac{2}{v}\sum_{i=1}^{3}\frac{W_i-W_{1i}}{r^2}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial W_i\partial t}]+\frac{F}{r} \tag{5.9}$$

为了把上式写成一个有意义的形式，考虑如下运算

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x-x_i}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]\right\}=\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x-x_1}{r^2})\cdot[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]+\frac{x-x_1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]$$

$$=\frac{1}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]-\frac{2(x-x_1)^2}{r^4}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]+\frac{x-x_1}{r^2}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}]-\frac{(x-x_1)^2}{vr^3}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}]$$

同理可求得$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{y-y_1}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]\right\}$和$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{z-z_1}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]\right\}$，三者求和为

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial W_i}\left\{\frac{W_i-W_{1i}}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]\right\}=\frac{1}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]-\frac{1}{vr}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}]+\sum_{i=1}^{3}\frac{W_i-W_{1i}}{r^2}[\frac{\partial^2\varphi}{\partial W_i\partial t}]$$

式中，$W_1=x$，$W_2=y$，$W_3=z$。上式乘以$-\frac{2}{v}$再加上$\frac{F}{r}$就等于式（5.9），于是

$$\frac{1}{r}\nabla^2 u=-\frac{2}{v}(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z})+\frac{F}{r}=-\frac{2}{v}\nabla\cdot f+\frac{F}{r} \tag{5.10}$$

若令

$$\frac{x-x_1}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]=f_x,\frac{y-y_1}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]=f_y,\frac{z-z_1}{r^2}[\frac{\partial\varphi}{\partial t}]=f_z \tag{5.11}$$

式（5.10）可写为

$$\frac{1}{r}\nabla^2 u=-\frac{2}{v}(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y}+\frac{\partial f_z}{\partial z})+\frac{F}{r}=-\frac{2}{v}\nabla\cdot f+\frac{F}{r}$$

由散度定理

$$\int_W \nabla\cdot \boldsymbol{f}\mathrm{d}W=\oint_Q f_n\mathrm{d}Q$$

可以得到

$$\int_W \frac{1}{r}\nabla^2 u\mathrm{d}W=\int_W -\frac{2}{v}\nabla\cdot \boldsymbol{f}\mathrm{d}W+\int_W \frac{F}{r}\mathrm{d}W=-\frac{2}{v}\oint_Q f_n\mathrm{d}Q+\frac{\mu_0\delta(t-o^*)}{r_0}$$

由于 $f_n=\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]$，所以

$$\int_W \frac{1}{r}\nabla^2 u\mathrm{d}W-\frac{F}{r_0}=-\frac{2}{r}\oint_Q \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\mathrm{d}Q \tag{5.12}$$

式中，$r_0$ 为激发源到各参考点的距离。

将式（5.12）和式（5.5）代入格林公式，并考虑到 $u=[\varphi]$，当 $M$ 点位于 $Q$ 外面时，格林公式左端为

$$\int_W (u\nabla^2 v-v\nabla^2 u)\mathrm{d}w=-\int_W \frac{1}{v}\nabla^2 u\mathrm{d}w=\frac{2}{v}\oint_Q \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\mathrm{d}Q+\frac{F}{r_0}$$

格林公式右端为

$$\oint_Q \left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}Q=\oint_Q \left[[\varphi]\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}[\varphi]\right]\mathrm{d}Q$$

$$=\oint_Q \left([\varphi]\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial n}-\frac{1}{r}\left[\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\right]\right)\mathrm{d}Q$$

根据格林公式左端等于右端，有

$$\frac{2}{v}\oint_Q \frac{1}{v}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\mathrm{d}Q+\frac{F}{r_0}=\oint_Q -\frac{1}{r^2}[\varphi]\frac{\partial r}{\partial n}\mathrm{d}Q-\oint_Q \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]\mathrm{d}Q$$
$$+\frac{1}{v}\oint_Q \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\mathrm{d}Q$$

基尔霍夫积分公式

$$\oint_Q \left\{-\frac{[\varphi]}{r^2}\frac{\partial r}{\partial n}-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}Q=\frac{F}{r_0} \tag{5.13}$$

式中，$F=\mu_0\delta(t-o^*)$。此时，显然 $M$ 点的 $\varphi$ 值为 $\frac{F}{r_0}$。

3. $M$ 点位于 $W$ 内（$W$ 为扰动区域）

当 $r\to 0$ 时，$v=\frac{1}{r}\to\infty$，格林公式不成立，为此必须去掉奇点 $M$，在 $M$ 点周围用一个半径为 $\varepsilon$ 的小球包围 $M$ 点构成 $\sigma$ 域，在 $Q$ 面和小球面 $\sigma$ 之间的区域应用格林公式，并利用式（5.13）的结果

$$\oint_{Q+\sigma} \left\{[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}Q=\frac{F}{r_0} \tag{5.14}$$

考虑

$$\iint_{\sigma}\left\{[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{v\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}\sigma$$

由于 $\varepsilon$ 很小，故 $\frac{\partial}{\partial n}=-\frac{\partial}{\partial\varepsilon}$（方向相反），$\mathrm{d}\sigma=\varepsilon^2\mathrm{d}\Omega$，$\mathrm{d}\Omega$ 为立体角。于是，上式变为

$$\iint_{\sigma}\left\{-[\varphi]\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right]+\frac{1}{v\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\varepsilon}\right)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}\sigma$$

$$\underline{\underline{\mathrm{d}\sigma=\varepsilon^2\mathrm{d}\Omega}}\iint_{\Omega}\left\{[\varphi]+\varepsilon\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right]+\frac{\varepsilon}{v}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}\Omega$$

$$\underline{\underline{\varepsilon\to 0}}\iint_{\Omega}[\varphi]\mathrm{d}\Omega=4\pi[\varphi]$$

代入式（5.14）中有

$$\iint_{Q}\left\{[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}Q+4\pi\varphi=\frac{F}{r_0}$$

所以区域 $W$ 内 $M$ 点的位移势

$$\varphi(x_M,y_M,z_M,t)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{Q}\left\{[\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right]-\frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}Q+\frac{F}{r_0}$$

（5.15）

由于式中 $F=\mu_0\delta(t-o^*)$，只有在 $t=0$ 处，$F(0)=\mu_0$；$t\neq 0$ 时，$F(t)=0$。在一般情况下 $t\neq 0$，故不需要考虑此项。

## 5.2 基尔霍夫积分偏移（曲面延拓）

我们知道，波场在地下传播可以用波动方程描述，其纵波波动方程为

$$\nabla^2 u-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F$$

上述方程的基尔霍夫积分解为

$$u(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\oint\!\!\!\oint_{Q}\left\{[u]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]-\frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right\}\mathrm{d}Q+\frac{F}{r_0}$$

（5.16）

式中，$F=\mu_0\delta(t-o^x)$，$Q=Q_0+Q_1$ 为闭合曲面，如图 5.2 所示，$Q_0$ 为地面，$Q_1$ 为无限大半球面，利用 $r\to\infty$ 时，$u\to 0$，$\frac{\partial u}{\partial t}\to 0$，所以 $Q$ 的曲面积分对 $M(X,Y,Z)$ 点波场函数的贡献为零，故

$$\iint_Q \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right] - \frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] \right\} \mathrm{d}Q = 0$$

因此，式（5.16）可写成

$$u(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi}\iint_Q \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]\right] \right\} \mathrm{d}Q + \frac{F}{r_0} \tag{5.17}$$

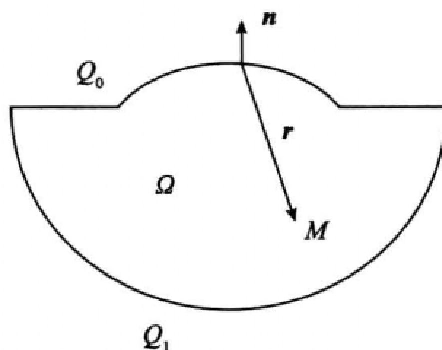



图 5.2　区域与边界

虚拟波场偏移处理是获取记录的逆过程，现在我们已知的是地面上（$Q_0$ 上）观测点的电磁响应的虚拟波场记录，需要确定反射面上作为二次虚拟辐射源的空间位置。对于 $u$（$x$，$y$，$z$，$t$）而言，当把 $t$ 改变成 $-t$ 时，即 $W$（$x$，$y$，$z$，$t$）$=u$（$x$，$y$，$z$，$-t$）时，$W$（$x$，$y$，$z$，$t$）仍可满足同样的波动方程。对于 $W$（$x$，$y$，$z$，$t$）是满足时间向前的问题，对于 $u$（$x$，$y$，$z$，$t$）就是时间“倒退”的问题。可以把反射界面的各点看为同时激发上行波的源点。这样，我们可以把地面上的接收点作为二次发射源，将这些信息值时间“倒退”到原来状态，寻找反射界面的波场函数，以确定反射界面。

设自激自收的上行波为 $G$（$x$，$y$，$z_0$，$t$），它是地下反射界面作为源点发射的波场 $g$（$x$，$y$，$z$，$t$）在地面上 $z=z_0$ 上的值，由式（5.17）可得

$$g(x,y,z,t) = -\frac{1}{4\pi}\iint_{Q_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n} - \frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t} \right\} G\left(\xi,\eta,\zeta_0,t+\frac{r}{v}\right) \mathrm{d}Q + \frac{F}{r_0} \tag{5.18}$$

式中，$G$（$\xi$，$\eta$，$\zeta_0$，$t+\frac{r}{v}$）取 $t+\frac{r}{v}$，是由于现在考虑的是波动的逆过程；事实上是由 $g$（$x$，$y$，$z$，$t$）在地表面上的值 $G$（$\xi$，$\eta$，$\zeta_0$，$t$）求出地下的波场值，从而确定反射界面，这即是波场的向下延拓。

# 5.3 波场延拓的边界单元法

## 5.3.1 基尔霍夫积分的离散化

用 $n$ 个节点对边界 $Q_0$ 进行剖分，将式（5.18）中的边界积分分解为各单元积分的积分之和，当 $P$ 点位于 $W$ 中时

$$g(x,y,z,t)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{Q_0}\left\{\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial n}-\frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial}{\partial t}\right\}G\left(\xi,\eta,\zeta_0,t+\frac{r}{v}\right)\mathrm{d}Q+\frac{F}{r_0} \tag{5.19}$$

## 5.3.2 单元分析

如图 5.3 所示，设三角形行单元顶点编号为 $j$，$k$，$m$；各节点坐标分别为（$x_j$，$y_j$，$z_j$），（$x_k$，$y_k$，$z_k$）和（$x_m$，$y_m$，$z_m$），首先我们做如下坐标变换，用形函数 $\xi_j$，$\xi_k$，$\xi_k$ 表示单元中任意点的坐标。

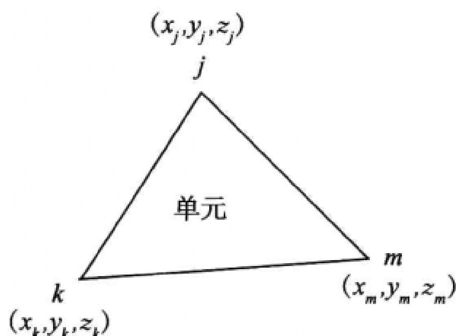



图 5.3　三角单元

$$\begin{aligned}x&=x_j\xi_j+x_k\xi_k+x_m\xi_m\\ y&=y_j\xi_j+y_k\xi_k+y_m\xi_m\\ z&=z_j\xi_j+z_k\xi_k+z_m\xi_m\end{aligned}\Rightarrow\begin{bmatrix}x_j,x_k,x_m\\ y_j,y_k,y_m\\ z_j,z_k,z_m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\xi_j\\ \xi_k\\ \xi_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} \tag{5.20}$$

式中，$\xi_j$，$\xi_k$，$\xi_m$ 是取值范围为 0～1 的函数，且

$$\xi_j+\xi_k+\xi_m=1,$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{在 } j \text{ 点},\xi_j=1,\xi_k=\xi_m=0\\ &\text{在 } k \text{ 点},\xi_j=1,\xi_k=\xi_m=0\\ &\text{在 } m \text{ 点},\xi_j=1,\xi_k=\xi_m=0\end{aligned}\right\} \tag{5.21}$$

可见，$\xi_j$，$\xi_k$，$\xi_m$ 是 $x$，$y$，$z$ 的线性函数。

由于单元 $Q_e$ 一般取得很小，故可假定波场 $G$ 在各单元上是线形变化的，即单元上的 $G$ 可表示为

$$G=\xi_j G_j+\xi_k G_k+\xi_m G_m=[\xi_j,\xi_k,\xi_m]\begin{bmatrix}G_j\\G_k\\G_m\end{bmatrix} \tag{5.22}$$

式中，$G_j$，$G_k$，$G_m$ 是地面 $Q_0$ 节点上的 $G$ 值。

考虑单元积分

$$\begin{aligned}&\iint_{\Gamma_e}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)G\left(\xi,\eta,\zeta_0,t+\frac{r}{v}\right)\mathrm{d}\Gamma\\&=\iint_{\Gamma_e}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial n}G\left(\xi,\eta,\zeta_0,t+\frac{r}{v}\right)\mathrm{d}\Gamma\\&=-\iint_{\Gamma_e}\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}G\left(\xi,\eta,\zeta_0,t+\frac{r}{v}\right)\mathrm{d}\Gamma\end{aligned}$$

式中，$\frac{\partial r}{\partial n}=\cos$（$\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$），将单元上的波场 $G$（$\xi$，$\eta$，$\xi_0$，$t+\frac{r}{v}$）统一用 $G_e$ 表示，则上式为

$$\begin{aligned}&-\iint_{\Gamma_e}\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}G\left(\xi,\eta,\xi_0,t+\frac{r}{v}\right)\mathrm{d}\Gamma\\&=-\sum_{e=j,k,m}\iint_{\Gamma_e}\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}\mathrm{d}\Gamma\cdot G_e=-\sum_{e=j,k,m}f_{ie}G_e\end{aligned} \tag{5.23}$$

式中，

$$f_{ie}=\iint_{\Gamma_e}\xi_e\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}\mathrm{d}\Gamma\qquad(e=j,k,m)$$

该式可用高斯求积公式计算

$$f_{ie}=\iint_{\Gamma_e}\xi_e\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}\mathrm{d}\Gamma=\sum_{q=1}^{4}\xi_e(q)\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}W_g\cdot\Delta$$

式中，$W_g$ 为加权系数，$\Delta$ 为三角形面积。

同理，单元积分

$$\iint_{\Gamma_e}\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma=\sum_{e=j,k,m}d_{ie}\frac{\partial G_e}{\partial n} \tag{5.24}$$

式中，

$$d_{ie}=\iint_{\Gamma_e}\xi_e\frac{1}{r}\mathrm{d}\Gamma=\sum_{q=1}^{4}\xi_e(q)\frac{1}{r}W_q\cdot\Delta \tag{5.25}$$

单元积分

$$\iint_{\Gamma_e}\frac{1}{vr}\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial G}{\partial t}\mathrm{d}\Gamma=\sum_{i=j,k,m}c_{ie}\frac{\partial G_e}{\partial t} \tag{5.26}$$

其中：

$$c_{ie}=\iint_{\Gamma_e}\xi_e\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{vr}=\sum_{q=1}^{4}\xi_e(q)\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{vr}W_q\cdot\Delta \tag{5.27}$$

### 5.3.3 合成矩阵

将式（5.23）、式（5.24）、式（5.26）代入式（5.19）中，$i$ 点处的波场为

$$g_i=-\frac{1}{4\pi}\left[F_iG-D_i\frac{\partial G}{\partial n}-C_i\frac{\partial G}{\partial t}\right]$$

由 $n$ 个节点得到一个方程组

$$\boldsymbol{G}=-\frac{1}{4\pi}\left\{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}-\boldsymbol{D}\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{n}}-\boldsymbol{C}\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial t}\right\} \tag{5.28}$$

式中，

$\boldsymbol{F}=[F_{ij}]$；$\boldsymbol{D}=[D_{ij}]$；$\boldsymbol{C}=[C_{ij}]$。其中，$F_{ij}$ 为 $j$ 节点上相邻单元 $f_{ij}$ 之和；$D_{ij}$ 为 $j$ 节点上相邻单元 $d_{ij}$ 之和；$C_{ij}$ 为 $j$ 节点上相邻单元 $c_{ij}$ 之和。若已知地表上的波场值 $\boldsymbol{G}=\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}^{\mathrm{T}}$，波场法向导数 $\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial\boldsymbol{n}}=\left(\frac{\partial g_1}{\partial n}, \frac{\partial g_2}{\partial n}, \cdots, \frac{\partial g_n}{\partial n}\right\}^{\mathrm{T}}$ 和波场速度 $\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial t}=\left\{\frac{\partial g_1}{\partial t}, \frac{\partial g_2}{\partial t}, \cdots, \frac{\partial g_n}{\partial t}\right\}^{\mathrm{T}}$ 就可以求得地下某点处的波场值。

### 5.3.4 单元积分的计算

1. cos（$\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$）的求法

因为 cos（$\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}$）$=\pm D/r$，其中 $D$ 是表示所考虑的节点 $i$ 到某个面元素所在的平面的距离，$r$ 是节点 $i$ 到面元素上任一点的距离。

1）$D$ 的求法

设面元素所在平面为

$$ax+by+cz+1=0 \tag{5.29}$$

然后把面元素上三个节点的已知坐标代入上式

$$\begin{cases}ax_j+by_j+cz_j+1=0\\ax_k+by_k+cz_k+1=0\\ax_m+by_m+cz_m+1=0\end{cases} \tag{5.30}$$

$$\begin{bmatrix}x_j\ y_j\ z_j\\x_k\ y_k\ z_k\\x_m\ y_m\ z_m\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{5.31}$$

这样就可求出 $a$，$b$，$c$。

设 $i$ 点到该平面上任一点（$x$，$y$，$z$）的距离为 $r_D$，则

$$r_D{}^2 = (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2 \tag{5.32}$$

由平面方程得

$$z = -\frac{ax+by+1}{c} \tag{5.33}$$

将上式代入 $r_D$ 中，并分别对 $x$，$y$ 求导数，再令其为零，得

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r_D{}^2}{\partial x} &= 2(x-x_i) + 2\left(\frac{ax+by+1}{c}+z_i\right)\frac{a}{c} = 0 \\ \frac{\partial r_D{}^2}{\partial y} &= 2(y-y_i) + \left(\frac{ax+by+1}{c}+z_i\right)\frac{b}{c} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.34}$$

求出 $x$，$y$ 分别记为 $x_D$，$y_D$，然后把他们分别代入平面方程（5.29）中，可求得 $z_D$，则

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{i}(x_D - x_i) + \boldsymbol{j}(y_D - y_i) + \boldsymbol{k}(z_D - z_i) \tag{5.35}$$

这样

$$|\boldsymbol{D}| = \sqrt{(x_D-x_i)^2 + (y_D-y_i)^2 + (z_D-z_i)^2} \tag{5.36}$$

所以

$$\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}) = \frac{|\boldsymbol{D}|}{|\boldsymbol{r}|} \tag{5.37}$$

式中，$|\boldsymbol{r}| = \sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}$，点（$x$，$y$，$z$）是元素面上的一点。

2）$x_D$，$y_D$，$z_D$ 的推导

由式（5.34）可知

$$(x-x_i) + \left(\frac{ax+by+1}{c}+z_i\right)\frac{a}{c} = 0 \tag{5.38}$$

$$(y-y_i) + \left(\frac{ax+by+1}{c}+z_i\right)\frac{b}{c} = 0 \tag{5.39}$$

由 $\frac{a}{c}$（5.38）$-\frac{b}{c}$（5.39）得

$$\frac{a}{c}(x-x_i) - \frac{c}{b}(y-y_i) = 0$$

所以

$$x = \frac{a(y-y_i)+bx_i}{b} \tag{5.40}$$

将式（5.40）代入式（5.37）中，得

$$\left(\frac{a(y-y_i)+bx_i}{b} - x_i\right) + \left[\frac{a\dfrac{[a(y-y_i)+by+1]}{b}+by+1}{c} + z_i\right]\frac{a}{c} = 0$$

所以，有

$$y=\frac{(c^2+a^2)y_i-bax_i-bcz_i-b}{a^2+b^2+c^2} \tag{5.41}$$

将式（5.41）代入式（5.40）中，得

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{b}\left[a\left(\frac{(c^2+a^2)y_i-bax_i-bcz_i-b}{a^2+b^2+c^2}-y_i\right)+bx_i\right] \\ &= \frac{(b^2+c^2)x_i-aby_i-acz_i-a}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned} \tag{5.42}$$

将式（5.41）和式（5.42）代入式（5.33）中得

$$z=-\frac{ax+by+1}{c}=\frac{(a^2+b^2)z_i-acx_i-bcy_i-c}{a^2+b^2+c^2} \tag{5.43}$$

将式（5.41）、式（5.42）和式（5.43）中的 $x$，$y$，$z$ 分别用 $x_D$，$y_D$，$z_D$ 表示，得到

$$\left.\begin{aligned} x_D &= \frac{(b^2+c^2)x_i-aby_i-acz_i-a}{a^2+b^2+c^2} \\ y_D &= \frac{(c^2+a^2)y_i-abx_i-baz_i-b}{a^2+b^2+c^2} \\ z_D &= \frac{(a^2+b^2)z_i-acx_i-bcy_i-c}{a^2+b^2+c^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.44}$$

2. 单元积分的计算

以单元积分 $f_{ij}$ 的表达式为例说明其计算方法，由上节推导可知

$$f_{ij}=\iint_{\Gamma_e}\xi_j\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}d\Gamma=\sum_{q=1}^{4}\xi_j(q)\frac{\cos(\boldsymbol{r}\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{r^2}w_g\Delta$$

取 4 点的高斯积分公式，由高斯积分公式表 5.1 知

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \frac{1}{3}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_1\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{{r_1}^2}\cdot(-9/16)\Delta+\frac{3}{5}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_2\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{{r_2}^2}(25/48)\Delta \\ &\quad +\frac{1}{5}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_3\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{{r_3}^2}(25/48)\Delta+\frac{1}{5}\frac{\cos(\boldsymbol{r}_4\cdot\hat{\boldsymbol{n}})}{{r_4}^2}(25/48)\Delta \end{aligned} \tag{5.45}$$

**表 5.1　四点高斯积分系数表**

| $q$ | $\xi_j^{(q)}$ | $\xi_k^{(q)}$ | $\xi_m^{(q)}$ | $w_g$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1/3 | 1/3 | 1/3 | −9/16 |
| 2 | 3/5 | 1/5 | 1/5 | 25/48 |
| 3 | 1/5 | 3/5 | 1/5 | 25/48 |
| 4 | 1/5 | 1/5 | 3/5 | 25/48 |

1）三角形面积△的求法

由图 5.3 知

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{kj} &= \boldsymbol{i}(x_k - x_j) + \boldsymbol{j}(y_k - y_j) + \boldsymbol{k}(z_k - z_j) \\ \boldsymbol{r}_{mk} &= \boldsymbol{i}(x_m - x_k) + \boldsymbol{j}(y_m - y_k) + \boldsymbol{k}(z_m - z_k)\end{aligned}\right\} \tag{5.46}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}_{kj} \cdot \boldsymbol{r}_{mk} &= |\boldsymbol{r}_{kj}||\boldsymbol{r}_{mk}| \cdot \cos(\pi - \theta) \\ &= -|\boldsymbol{r}_{kj}||\boldsymbol{r}_{km}|\cos\theta\end{aligned} \tag{5.47}$$

式中，$\boldsymbol{r}_{kj}$ 的方向是由 $\boldsymbol{j}$ 节点指向 $\boldsymbol{k}$ 节点，$\boldsymbol{r}_{mk}$ 的方向是由 $\boldsymbol{k}$ 节点指向 $\boldsymbol{m}$ 节点，$\theta$ 为 $\boldsymbol{r}_{kj}$ 与 $\boldsymbol{r}_{mk}$ 得夹角，故

$$\cos\theta = -\frac{(x_k - x_j)(x_m - x_k) + (y_k - y_j)(y_m - y_k) + (z_k - z_j)(z_m - z_k)}{\sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}\ \sqrt{(x_m - x_k)^2 + (y_m - y_k)^2 + (z_m - z_k)^2}}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$$

三角形单元的高

$$h = \sqrt{(x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2}\sin\theta \tag{5.48}$$

三角形面积

$$\Delta = \frac{1}{2}h|\boldsymbol{r}_{mk}| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_{kj}||\boldsymbol{r}_{mk}|\sin\theta = \frac{1}{2}|\boldsymbol{r}_{kj}||\boldsymbol{r}_{mk}|\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{r}_{kj} \cdot \boldsymbol{r}_{mk}}{|\boldsymbol{r}_{kj}||\boldsymbol{r}_{mk}|}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(|\boldsymbol{r}_{kj}||\boldsymbol{r}_{mk}|)^2 - [(x_k - x_j)(x_m - x_k) + (y_k - y_j)(y_m - y_k) + (z_k - z_j)(z_m - z_k)]^2} \tag{5.49}$$

2) $|\boldsymbol{r}|$ 的求法

式 (5.45) 中的 $r_1$，$r_2$，$r_3$，$r_4$ 的表达式可写为

$$r_q = \sqrt{(x_q - x_i)^2 + (y_q - y_i)^2 + (z_q - z_i)^2}$$

式中，$q$ 为高斯积分节点数，$r_q$ 是区域 $\Omega$ 内某点 ($x$，$y$，$z$) 至单元上任一点 ($x_q$，$y_q$，$z_q$) 的距离。

我们知道三角形单元上的坐标可表示为

$$\left.\begin{aligned}x &= x_j\xi_j^{(q)} + x_k\xi_k^{(q)} + x_m\xi_m^{(q)} \\ y &= y_j\xi_j^{(q)} + y_k\xi_k^{(q)} + y_m\xi_m^{(q)} \\ z &= z_j\xi_j^{(q)} + z_k\xi_k^{(q)} + z_m\xi_m^{(q)}\end{aligned}\right\} \tag{5.50}$$

对于四点 ($q$=1，2，3，4) 高斯积分公式，当 $q$=1 时有

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - x_i)^2 + (y_1 - y_i)^2 + (z_1 - z_i)^2} \tag{5.51}$$

式中，

$$\begin{cases}x_1 = x_j\xi_j^{(1)} + x_k\xi_k^{(1)} + x_m\xi_m^{(1)} = \dfrac{1}{3}x_j + \dfrac{1}{3}x_k + \dfrac{1}{3}x_m \\ y_1 = y_j\xi_j^{(1)} + y_k\xi_k^{(1)} + y_m\xi_m^{(1)} = \dfrac{1}{3}y_j + \dfrac{1}{3}y_k + \dfrac{1}{3}y_m \\ z_1 = z_j\xi_j^{(1)} + z_k\xi_k^{(1)} + z_m\xi_m^{(1)} = \dfrac{1}{3}z_j + \dfrac{1}{3}z_k + \dfrac{1}{3}z_m\end{cases}$$

当 $q=2, 3, 4$ 时有

$$r_2 = \sqrt{(x_2 - x_i) + (y_2 - y_i) + (z_2 - z_i)} \tag{5.52}$$

式中，

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{3}{5}x_j + \dfrac{1}{5}x_k + \dfrac{1}{5}x_m \\ y_2 = \dfrac{3}{5}y_j + \dfrac{1}{5}y_k + \dfrac{1}{5}y_m \\ z_2 = \dfrac{3}{5}z_j + \dfrac{1}{5}z_k + \dfrac{1}{5}z_m \end{cases}$$

$$r_3 = \sqrt{(x_3 - x_i) + (y_3 - y_i) + (z_3 - z_i)} \tag{5.53}$$

式中，

$$\begin{cases} x_3 = \dfrac{1}{5}x_j + \dfrac{3}{5}x_k + \dfrac{1}{5}x_m \\ y_3 = \dfrac{1}{5}y_j + \dfrac{3}{5}y_k + \dfrac{1}{5}y_m \\ z_3 = \dfrac{1}{5}z_j + \dfrac{3}{5}z_k + \dfrac{1}{5}z_m \end{cases}$$

$$r_4 = \sqrt{(x_4 - x_i)^2 + (y_4 - y_i)^2 + (z_4 - z_i)^2} \tag{5.54}$$

式中，

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{1}{5}x_j + \dfrac{1}{5}x_k + \dfrac{3}{5}x_m \\ y_4 = \dfrac{1}{5}y_j + \dfrac{1}{5}y_k + \dfrac{3}{5}y_m \\ z_4 = \dfrac{1}{5}z_j + \dfrac{1}{5}z_k + \dfrac{3}{5}z_m \end{cases}$$

# 第 6 章 TEM 虚拟波场速度分析

随着 TEM 虚拟波场深度偏移方法的应用，人们开始关注直接影响偏移成像质量的偏移速度建模技术。在地震勘探中，速度建模技术可分为射线法和波动方程法两种方法，波动方程法又分为深度聚焦分析和剩余曲率分析，其中的射线法是基于射线追踪理论。按所基于的道集，分为共中心点道集、共成像点道集、共反射点道集、共聚焦点道集和共反射面道集。这些速度分析方法在 TEM 虚拟波场深度偏移中均可借鉴，但需要指出，TEM 虚拟波场是经过数学变换得到的，不是客观存在，因此，还有其特殊性。本文从瞬变电磁场本身的特性出发，基于等效导电平面的理论，提出瞬变电磁虚拟波场连续速度分析方法。

## 6.1 基于等效导电平面法的速度建模原理

等效导电平面法是根据视纵向电导曲线的特征值直观地划分地层的一种近似方法，因此又称“视纵向电导法”。由于该方法可以形象地理解为，随着 $t$ 的增减，等效导电平面以$\frac{1}{\mu_0\sigma}$速度上下“浮动”，这样便可以用一块随时间 $t$ 的变化而“沉浮”的“载流”导电平面来近似代替回线源中的均匀大地，以便于求出地表任一点的异常场。可见，导电平面上下浮动的速度仅与介质的电导率有关，这一点与 TEM 虚拟波场的传播速度完全一致。可以设想，用等效导电平面法求出地电断面上的纵向电导分布，即求得随深度变化的纵向电导值，由 TEM 虚拟波场的速度公式计算出速度值，实现连续速度分析。

### 6.1.1 等效导电平面法基本原理

设在地面上有圆形回线，其中通以阶跃电流，并在 $t=0$ 时刻断开电源，即

$$I(t)=\begin{cases}I & t<0\\0 & t\geqslant 0\end{cases}$$

则在 $t\geqslant 0$ 时，在地下产生涡旋电流，在地表任一点均可观测到由此涡流产生的电磁场。根据电磁理论，我们可用一个导电平面来代替地下均匀介质，然后用镜像法可方便地求出空间任一点的感应电磁场。如图 6.1 所示，设 $A$

为一完全导电平面，面电导率为$\sigma$，其$h$处有一条半径为$a$的圆形回线，其中电流强度为$I$。

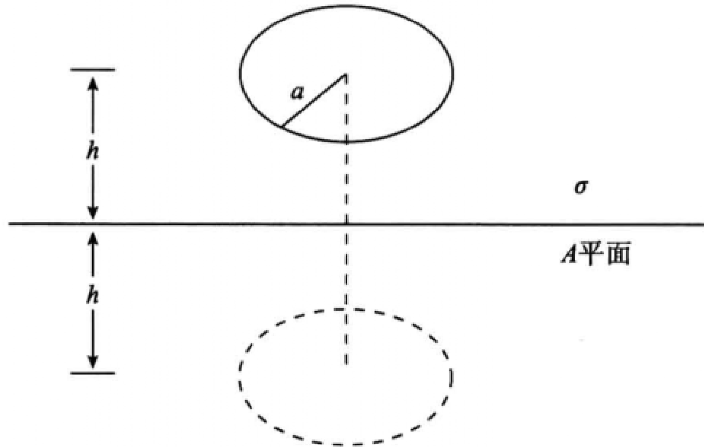



图 6.1　等效导电平面图

当电源断开时，由于电磁感应，导电板$A$上产生涡流，为求出涡流产生的电磁场，在$A$前方$h$处，置一虚源代替导电平面板中的涡流，因此只需求出虚源在空间任一点产生的电磁场即可。

根据电磁场理论，引入矢势$\boldsymbol{A}$，则导电板内任一点的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6.1}$$

板内面电流密度为

$$\frac{j}{\sigma_{面}}=-\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{6.2}$$

根据板内涡流的分布可知，矢势$\boldsymbol{A}$仅有$A_\varphi$分量，并仅是$r$的函数，而且涡流强度亦是$r$的函数。因此假定电流强度$I(r)$为板上任一点$r$处到边界上的总电流，则面电流密度为

$$j=\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}$$

由安培环路定律

$$\mu_0 I(r)=\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{6.3}$$

积分路径$L$为自$r$经平板上方绕过板边缘，再由下方返回$r$处。由式(6.3)得

$$\mu_0 j=\mu_0\frac{\mathrm{d}I(r)}{\mathrm{d}r}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\oint_L \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\int_0^\infty Br\,\mathrm{d}r=-2Br$$

故

$$j=-\frac{2Br}{\mu_0} \tag{6.4}$$

将式（6.4）代入式（6.2），有

$$\frac{2Br}{\sigma_{面}\ \mu_0}=\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} \tag{6.5}$$

由于 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，将 $B_r=-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}$ 代入（6.5）式，有

$$\frac{2}{\mu_0\sigma_{面}}\ \frac{\partial A_\varphi}{\partial Z}=-\frac{\partial A_\varphi}{\partial t}(\sigma=\sigma_{面}) \tag{6.6}$$

该方程的解有如下形式

$$A_\varphi=f\left(Z+\frac{2t}{\mu_0\sigma}\right) \tag{6.7}$$

这就是板外任一点处矢势 $\boldsymbol{A}$ 的 $A_\varphi$ 分量所满足的方程。

根据镜像法原理，像源线圈在地面上一点产生的矢势分量 $A_\varphi$（即异常场）可由下式表示

$$A_\varphi=f\left(z+\frac{2t}{\mu_0\sigma}\right)_{z=2h}=f\left(2h+\frac{2t}{\mu_0\sigma}\right) \tag{6.8}$$

此式说明，在 $t>0$ 时，虚源以速度 $2/\mu_0\sigma$ 向下作匀速运动。可形象地理解为，随 $t$ 的增减，等效导电平面 $A$ 便以速度 $1/\mu_0\sigma$ 上下“浮动”。当 $t$ 增大时，它下沉，当 $t$ 减小时，它又逐渐“上浮”。这样便可以用一块随时间 $t$ 的变化而“沉浮”的“载流”导电平面来近似代替大地的均匀介质，从而便于求出地表任一点的异常场。

### 6.1.2　水平层状介质表面的瞬变电磁场的近似计算

瞬变电磁法中，视纵向电导指的是在断电后的某一时刻，电磁场的有效分布范围内地电断面能被具有一定深度的均匀导电平面等效代替时的纵向电导。并由此可知，该等效导电平面和其纵向电导以及等效深度均随时间而改变。

下面导出均匀大地表面上回线中心处的异常场表达式。

选取柱坐标系，设虚源中的电流强度为 $I$，虚源平面与 $xoy$ 平面重合，圆心位于坐标原点。任取一线电流源 $I\mathrm{d}s$，它在 $z$ 轴上任一点 $P$ 处产生的磁场强度垂直分量为

$$\mathrm{d}H_z=\frac{1}{4\pi}I\,\frac{\mathrm{d}s}{R^2}\sin\theta \tag{6.9}$$

则整个回线在 $P$ 点产生的磁场强度为

$$H_z=\frac{1}{4\pi}\oint_L\frac{\mathrm{d}s}{R^2}\sin\theta=\frac{Ia^2}{2}\ \frac{1}{(a^2+z^2)^{3/2}} \tag{6.10}$$

考虑到等效导电平面的“浮动”，把 $z=2h+2t/\mu_0\sigma$ 代入上式，得

$$H_z=\frac{Ia^2}{2}\ \frac{1}{\left[a^2+4\left(h+\frac{t}{\mu_0\sigma}\right)\right]^{3/2}} \tag{6.11}$$

于是

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{6Ia^2}{s}\frac{h+\frac{t}{\mu_0 s}}{\left[a^2+4\left(h+\frac{t}{\mu_0 s}\right)^2\right]^{5/2}} \tag{6.12}$$

式中，$s=\sigma$ 为等效导电平面的电导率。

式（6.11）和式（6.12）即为用等效导电平面法计算均匀大地表面上回线中心处瞬变场的近似计算公式。

令

$$m=h+\frac{t}{\mu_0 s}$$

$$\bar{m}=\frac{h}{a}+\frac{t}{\mu_0 sa}$$

则

$$H_z=\frac{I}{2a}\frac{a^3}{(a^2+4m^2)^{3/2}}=\frac{I}{2a}\frac{1}{(1+4\bar{m}^2)^{3/2}} \tag{6.13}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{6I}{sa^2}\frac{a^4 m}{(a^2+4m^2)^{5/2}}=-\frac{6I}{sa^2}\frac{\bar{m}}{(1+4\bar{m}^2)^{5/2}} \tag{6.14}$$

令 $4m^2\gg 1$ 或 $a^2\ll 4m^2$，即得到晚期瞬变场的近似表达式

$$H_z=\frac{Ia^2}{16m^3} \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t}=-\frac{3Ia^2}{16sm^4} \tag{6.16}$$

对于水平层状地电断面，我们也可以用等效导电平面法求得瞬变场的近似解。只不过这时的等效平面随时间增大而“下沉”的速度不再是常数，而分别与各层介质的电导率有关。

对于水平层状介质，引入等效导电平面的深度 $h_{效}$，它等于组成断面的单位薄层的平均厚度。

$$h_{效}=\left[\frac{\int_0^H\sigma(z)z^g\mathrm{d}z}{\int_0^H\sigma(z)\mathrm{d}z}\right]^{\frac{1}{g}}=\left[\frac{\int_0^H\sigma(z)z^g\mathrm{d}z}{s}\right]^{\frac{1}{g}} \tag{6.17}$$

式中，$\sigma$（$z$）为介质电导率；$H$ 为研究深度，即某一时刻对异常场作实质贡献的深度；$s$ 为研究深度以上介质的总纵向电导；$g$ 为在计算 $h_{效}$ 过程中，确定上、下地层相对权的参数，$g>0$；$0\leqslant h_{效}\leqslant H$，且 $h_{效}$ 等于等效导电板的中心深度。

由式（6.14）知，等效导电平面计算$\frac{\partial B_z\ (t)}{\partial t}$的近似公式为

$$\frac{\partial B_z(t)}{\partial t}=-\frac{6I}{sa^2}\frac{\bar{m}}{(1+4\bar{m}^2)^{5/2}} \tag{6.18}$$

将该式写成如下形式

$$\frac{\partial B_z(t)}{\partial t}=\frac{k}{s}F(\bar{m}) \tag{6.19}$$

式中，$k=-\dfrac{6I}{a^2}$，$F(\bar{m})=\dfrac{\bar{m}}{(1+4\bar{m}^2)^{5/2}}$

我们由上式引入视纵向电导

$$S_\tau(t)=\frac{kF(\bar{m})}{\dfrac{\partial B_z(t)}{\partial t}} \tag{6.20}$$

该式可用于野外实测资料的整理，$\dfrac{\partial B_z\ (t)}{\partial t}$为实测值。

### 6.1.3　$\bar{m}$ 参数的优化提取

由式（6.20）知，在获得实测$\dfrac{\partial B_z\ (t)}{\partial t}$值后，要求得 $S_\tau(t)$，必须得到 $F(\bar{m})$的值，而 $F(\bar{m})$与等效导电平面的深度 $h$ 有关，即与研究深度有关。野外实际工作中难以直接得到 $F(\bar{m})$值。为此，利用对$\dfrac{\partial B_z\ (t)}{\partial t}$曲线进行微分的方法间接求取 $F(\bar{m})$值。对于实测曲线$\dfrac{\partial B_z\ (t)}{\partial t}$，求其对时间的导数

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial \bar{m}}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)\cdot\frac{\partial\ (\bar{m})}{\partial t}=\frac{k}{s}\cdot\frac{\partial F(\bar{m})}{\partial \bar{m}}\cdot\frac{\partial t}{\partial\ (\bar{m})}$$

$$=\frac{k}{s}\cdot\frac{\partial F(\bar{m})}{\partial m}\cdot\frac{1}{\mu_0 sa} \tag{6.21}$$

引入辅助函数 $\varphi(\bar{m})$

$$\varphi(\bar{m})=\frac{\left|\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}\right|}{\left[\dfrac{\partial B_z(t)}{\partial t}\right]^2}\cdot\mu_0 ak \tag{6.22}$$

于是

$$\varphi(\bar{m})=\frac{\dfrac{k}{s}\left|\dfrac{\partial F(\bar{m})}{\partial \bar{m}}\right|\dfrac{1}{\mu_0 ak}}{\left[\dfrac{k}{s}F(\bar{m})\right]^2}\mu_0 ak=\left|\frac{\partial F(\bar{m})}{\partial \bar{m}}\right|/\left[F(\bar{m})\right]^2 \tag{6.23}$$

由于

$$F(\bar{m})=\frac{\bar{m}}{(1+4\bar{m}^2)^{5/2}} \tag{6.24}$$

于是

$$\varphi(\bar{m}) = (1 + 4\bar{m}^2)^{3/2} \left| \frac{1}{\bar{m}^2} - 16 \right| \tag{6.25}$$

综上所述，求取纵向电导曲线的具体步骤为：

(1) 首先求得$\dfrac{\partial B_z(t)}{\partial t}$实测曲线和它的时间导数曲线；

(2) 把$\dfrac{\partial B_z(t)}{\partial t}$和$\dfrac{\partial^2 B_z(t)}{\partial t^2}$代入式 (6.22)，求得辅助函数；

(3) 再由样条插值可得到各时间 $t$ 的 $\varphi(\bar{m})$值对应的值 $\bar{m}$；

(4) 把 $\bar{m}$ 代入式 (6.24)，再代入式 (6.20) 求得 $S_\tau(t)$的值，并代入下式求 $H_\tau(t)$，其中

$$H_\tau(t) = (m - t/\mu_0 s_\tau)^{1/3} \left( \frac{9}{8} m - \frac{t}{\mu_0 s_\tau} \right)^{2/3} \tag{6.26}$$

由上述步骤可知，要求得视纵向电导 $S_\tau$ 和视深度 $H_\tau$，就必须求得 $\bar{m}$，而 $\bar{m}$ 值可由式 (6.25) 中的 $\varphi(\bar{m})$求得，且该式中的 $\varphi(\bar{m})$的大小只与 $\bar{m}$ 值有关，我们可把该式所求得的 $\varphi(\bar{m})$值视为理论的 $\varphi(\bar{m})$，记作 $\varphi_L(\bar{m})$。步骤 (1) 中的$\dfrac{\partial B_z(t)}{\partial t}$是一组野外实测获得的值，时间 $t$ 在测量过程中给定，$\dfrac{\partial^2 B_z(t)}{\partial t^2}$可根据已获得的$\dfrac{\partial B_z(t)}{\partial t}$与 $t$ 值求出，由此我们可把由式 (6.22) 得出的辅助函数视为实测的 $\varphi(\bar{m})$，记作 $\varphi_S(\bar{m})$。

在此推导过程中，式 (6.22) 中的 $\varphi(\bar{m})$与式 (6.25) 中的 $\varphi(\bar{m})$是相等的，也就是说，$\varphi_S(\bar{m})$应等于 $\varphi_L(\bar{m})$，这就为我们用最优化法求解 $\bar{m}$ 值创造了条件。反过来说，$\bar{m}$ 值的大小直接影响到了等效导电平面解释法的最终结果，即视纵向电导 $S_\tau$ 和视深度 $H_\tau$。如果 $\bar{m}$ 值取了最优解，$s_\tau$ 和 $H_\tau$ 也能得到最优解，反演成像结果也最能接近实际目标体的模型。为此建立目标函数

$$\Phi(\bar{m}) = \left\| \frac{\left| \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \right|}{\left[ \dfrac{\partial B_z(t)}{\partial t} \right]^2} \cdot \mu_0 a k - (1 + 4\bar{m}^2)^{3/2} \left| \frac{1}{\bar{m}^2} - 16 \right| \right\|^2$$

当该函数取极小值时 $\bar{m}$ 值取得最优解。

但是，大多数的优化方法都要先给出一初始数值，根据给定条件判断该初始值是否是最优解，如果是就终止算法，否则对初始值进行改变再进行运算，直到符合终止条件为止，这些方法的初始数值模型对最后的解有很大的影响，而好的模型的选择却又是另一个较难解决的问题。当然也可采用一种无需给定初始模型的优化方法来解决对 $\bar{m}$ 值的求解。如模拟人脑机理和功能的一种新型计算机和人工智能技术，或者建立在生物进化论基础上的遗传算法。

## 6.2　单个测点的速度建模方法

图 6.2 是基于等效导电平面法提出的虚拟波场速度估算方案，对于自激自收观测方式，我们从最顶层的估算开始，给出初始参数 $\bar{m}^{(0)}$，便可确定 $s_\tau^{(0)}$ 和 $h_\tau^{(0)}$，给原始模型参数 $\bar{m}^{(0)}$ 一个小的扰动 $\delta\bar{m}$，然后再利用牛顿迭代法计算模型参数更新

$$\bar{m}^{(1)} = \bar{m}^{(0)} + \delta\bar{m} \tag{6.27}$$

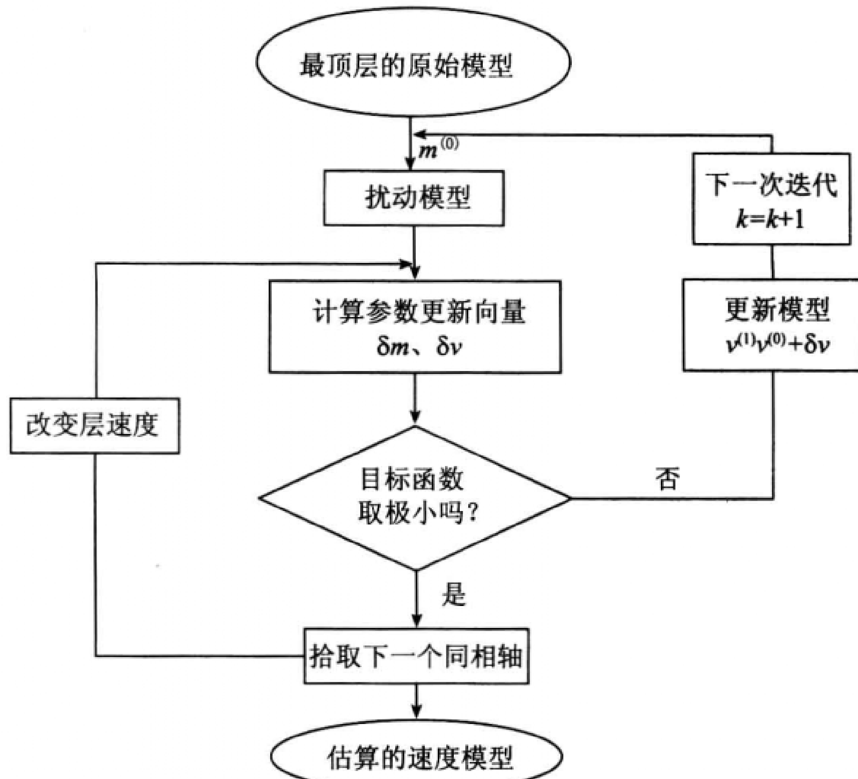



图 6.2　速度模型迭代算法

得到新的模型后，再由目标函数 $\Phi(\bar{m})$ 的极小值确定 $\bar{m}$ 参数的一次估计值 $\bar{m}^{(1)}$，由式 (6.20) 得到 $s_\tau$ 和 $h_\tau$ 的一次估计值 $s_\tau^{(1)}$ 和 $h_\tau^{(1)}$，重复以上步骤便可得到一组随视深度变化的视纵向电导分布曲线。求得随深度变化的纵向电导值后，由总纵向电导公式

$$S_\tau(h) = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i h_i \tag{6.28}$$

可以导出

$$\sigma_i = \frac{S_\tau(h_i) - S_\tau(h_{i-1})}{h_i} \tag{6.29}$$

即可求出电导率值 $\sigma$，然后由 TEM 虚拟波场的速度公式

$$v = 1/\sqrt{\mu_0 \sigma} \tag{6.30}$$

计算出速度值，实现速度建模。

## 6.3 连续速度分析

对于从实际测量的数据中得到的虚拟速度值 $v$，因为实际测量的数据量不可能很大，所以计算得到的速度值在空间分布上也会表现得较为稀少，这样就会给进一步的波场延拓成像工作带来不便。为了解决虚拟速度数据不够丰富的问题，我们将使用三维空间插值计算的办法，来使该数据量在保证正确的基础上得以迅速扩大，而在多种空间插值方法中，我们应该以如下的过程来选择适合我们使用的方法（图 6.3）。

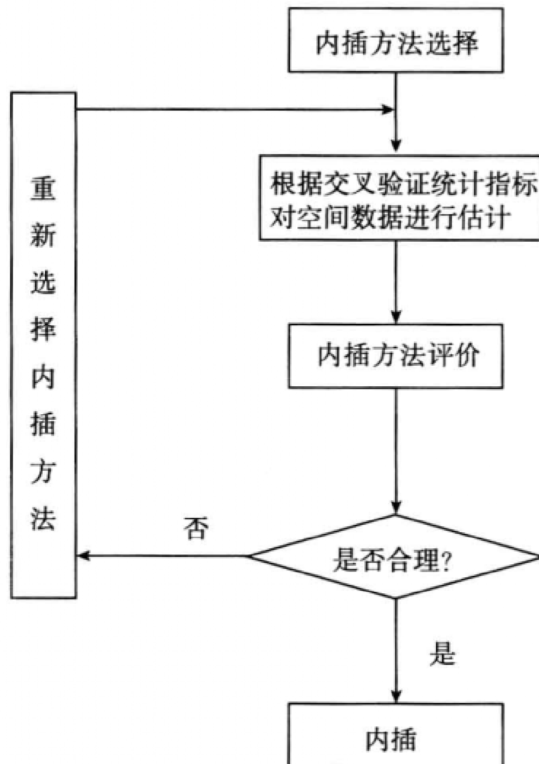



图 6.3　空间内插方法选择流程图

最终，根据在正确性和速度上的双重标准，我们选择以如下的两步插值方法来进行计算。

### 6.3.1　全局距离加权插值

采用全局距离加权插值的办法，将计算得到的原始虚拟速度值进行适度数据量的插值。所谓全局距离加权插值，是指针对散乱数据的全局按距离成反比的加权插值计算，其速度受原始数据点数目和插值点数目的影响。

假设平面上分布一系列离散点，已知其位置坐标（$x_i$，$y_i$）和属性值 $P$（$i=1$，2，…$n$），$p$（$x$，$y$）为任一格网点，全局距离加权插值法假设 $P$ 点的属性值是在局部邻域内中所有数据点的距离加权平均值，可以进行确切的或者平滑的方式插值。周围点与 $P$ 点因分布位置的差异，对 $P$（$z$）影响不同，我们把这种影响称为权函数 $W_i$（$x$，$y$），其主要与距离有关，另外也与方向有关，这时

$$P(z)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{z_i}{[d_i(x,y)]^n}}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{[d_i(x,y)]^n}} \tag{6.31}$$

式中，

$$d_i(x,y)=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} \tag{6.32}$$

它表示由离散点（$x_i$，$y_i$）至 $P$（$x$，$y$）点的距离。$P$（$z$）为要求的待插点的值。

权函数 $W_i$（$x$，$y$）与预测点和已知样点之间的距离的 $u$ 次幂成反比。因此，随着距离的增加，权重迅速地减小，权重减小的速度取决于指数 $u$ 的大小。对于一个较大的指数，较近的数据点被给定一个较高的权重份额；对于一个较小的指数，权重比较均匀地分配给各数据点。

全局距离加权插值方法创建一个粗略的数据表面，该数据表面受奇异值（特别是边缘的极高、极低值）的影响较大。同时，网格化的疏密程度也对结果有影响，如图6.4（见彩图）所示，图6.4（a）为 $X$，$Z$ 方向网格30的插值结果，图6.4（b）为 $X$，$Z$ 方向网格100的插值结果。可以明显看出下图的图像非常圆滑，没有过多的锯齿图案。

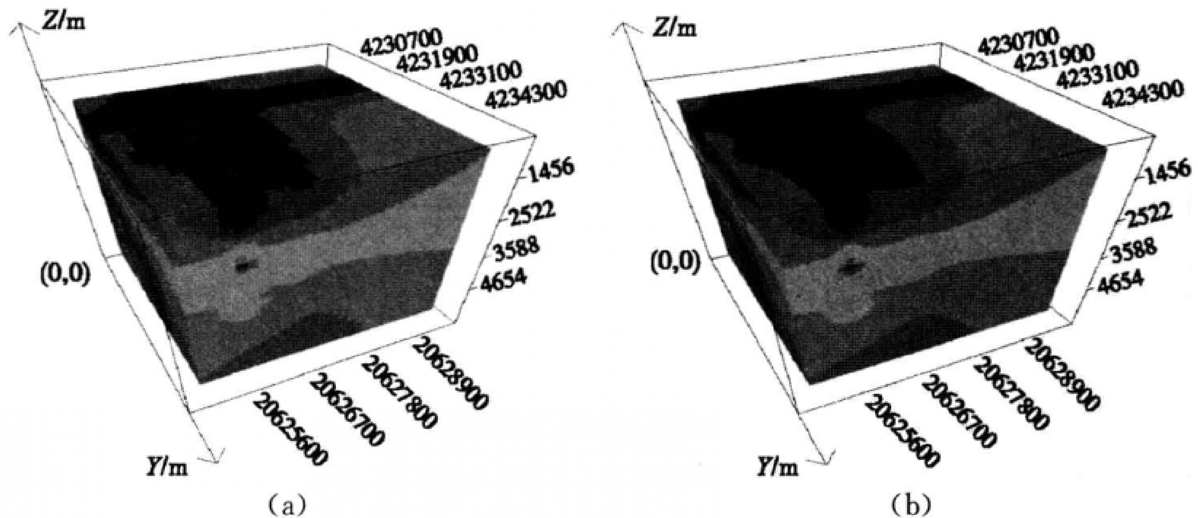



图6.4　全局距离加权插值的不同网格化程度的对比

(a) X，Z方向网格30的插值结果；(b) X，Z方向网格100的插值结果

采用这个方法做第一步插值，主要是为了保证在扩大数据量的同时，还保证在插值出来的点上，虚拟速度值与周围原始数据过渡圆滑，其值与真实值尽可能接近。而只做小范围内的计算，是为了不让插值点数过于超过已知点数目，导致假值的过多出现，并且不会使计算速度过慢，时间过长。

### 6.3.2 近点线性插值

对由全局距离加权插值出来的数据，进一步做近点线性插值计算，根据我们的实际需要，在我们需要的空间点上，插值出虚拟速度值。

首先需要对现有的源数据进行网格化，为了配合延拓成像工作，我们将采取曲面延拓一样的网格划分方法，使用三角网格。如图 6.5 所示，图中普通数字为网格节点编号，圈型数字是单元编号。

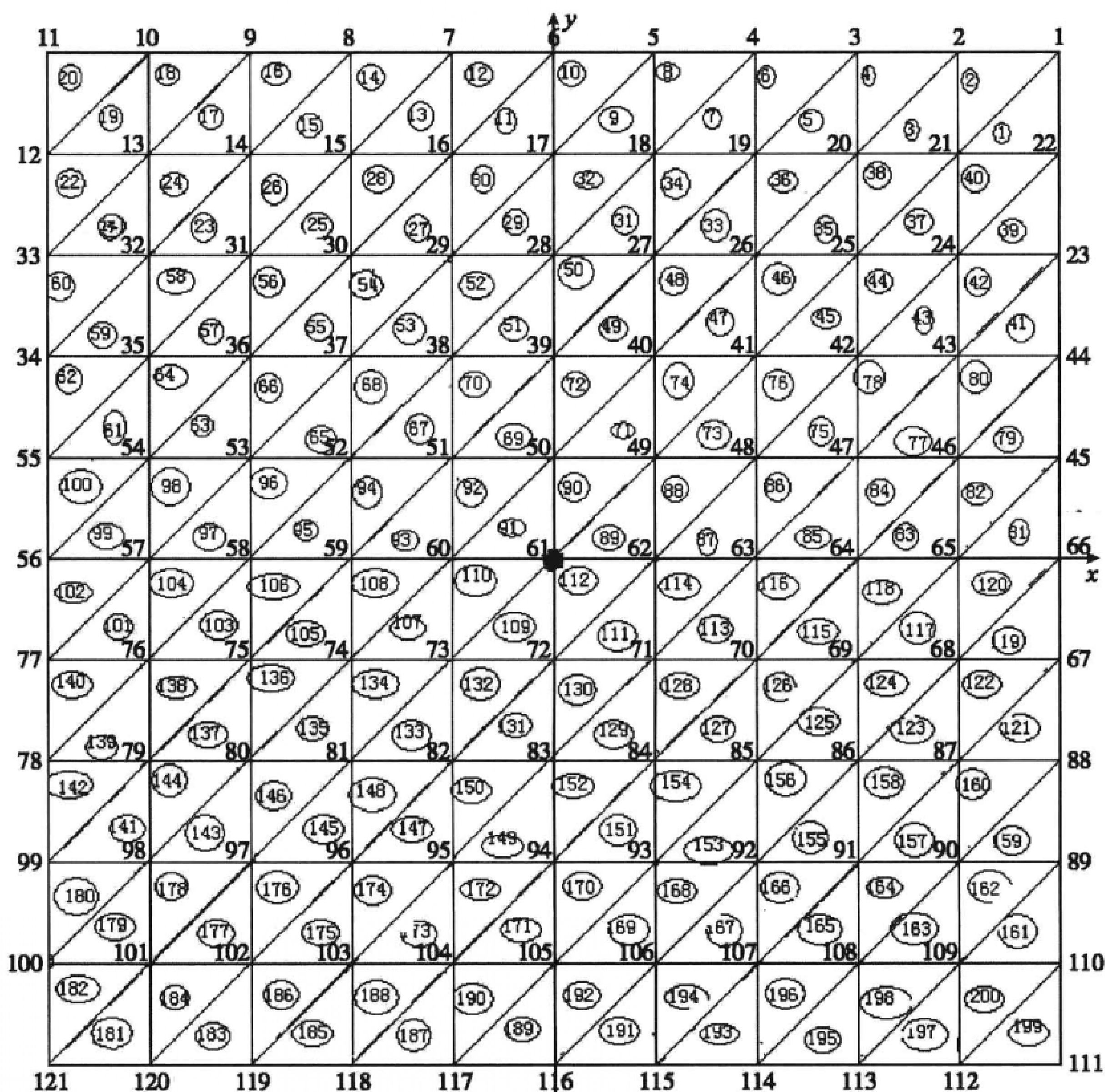



图 6.5 近点线性插值网格划分方法示意图

由此可以得到原始文件格式，分别给出了各个已知点在地面上的坐标和在地下的深度以及该点上的电性参数数值。

紧接着，我们要确定插值点的邻域。空间位置相近的两个样品点间存在着一定的相关性，但随着距离的增加这种相关性将变弱。在一定的距离外，采样点与预测点不相关。因此在实际应用中，需要通过定义邻域的形状与邻域内已知样品点的数目。

一个好的预测方案要求参与预测的观测点来自多个方向上。如图 6.6 所示，一个圆形邻域被分成四个扇区并定义每个扇区内参与预测的观测点的数目为 3～5 个。

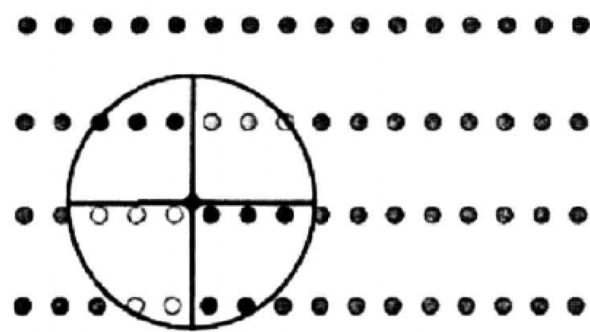


图 6.6　邻域中参与预测的观测点数目的定义

取样点的位置在空间插值有着重要的影响。当数据点相关且均匀分布时，能更好地反映研究要素在空间的分布特征，对于源数据的分析和插值方法的选择有很大的帮助；当数据点成群或不均匀分布时，难以很好地反映研究要素在整个空间的分布特征，可能会造成插值结果的不合理。取样时，尽量使样本点均匀分布。

如图 6.7（见彩图）所示，对于要插值的每一点，在其上方的所有已知点

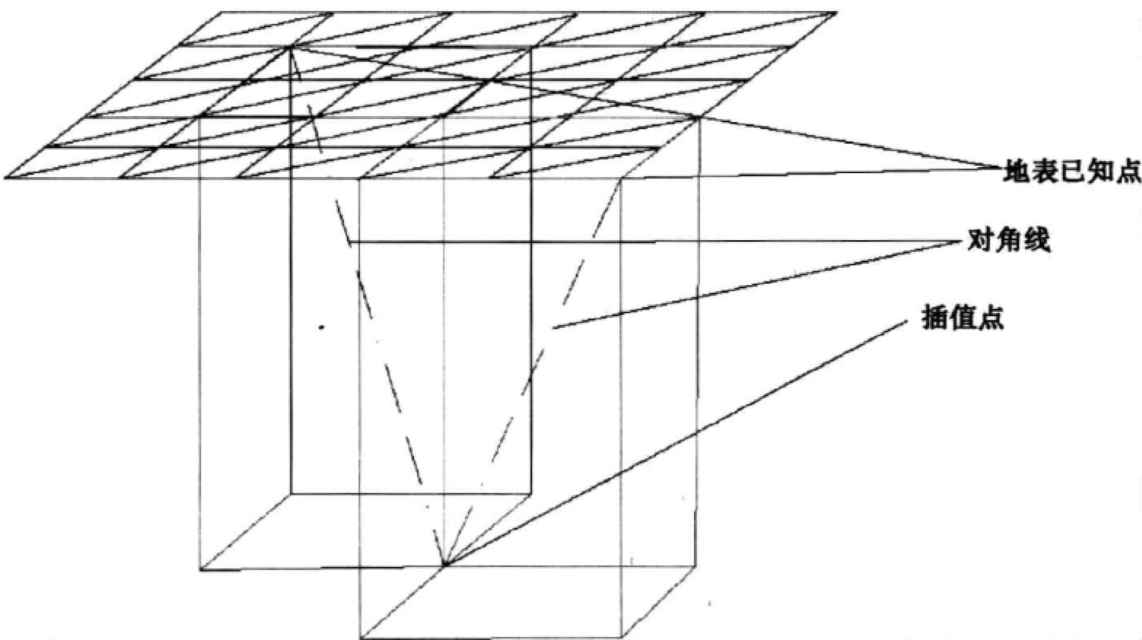



图 6.7　近点线性插值计算原理示意图

都要对这一点的速度值产生影响，因此针对任意一个插值点，地表上每一个已知点都将和它构成一个选择预测点的邻域，为了确定每一次计算时的邻域大小，我们将采用通过两点来确定一条直线的办法，把地表已知点与插值点的连线计算出来，则以该连线作为对角线的立方体即为所需要的邻域，该区域的每一个已知数据点都是用来预测的观测点，之后从这些点中选取与插值点距离最近的一点数据作为插值点的临时值记录下来；然后换一个地表已知点重复这个步骤，直到地表的已知点数据全部做完；最后，对所有的临时值取平均，所得到的数据就作为插值点的最终结果保存进结果文件，这样，就完成了一次近点线性插值计算。

在计算过程中，根据格林公式的原理，为了保证延拓时每一次单元积分都沿逆时针方向，在插值过程中，地表已知点的循环顺序必须严格按照节点编号的顺序来计算，如图 6.8 所示。

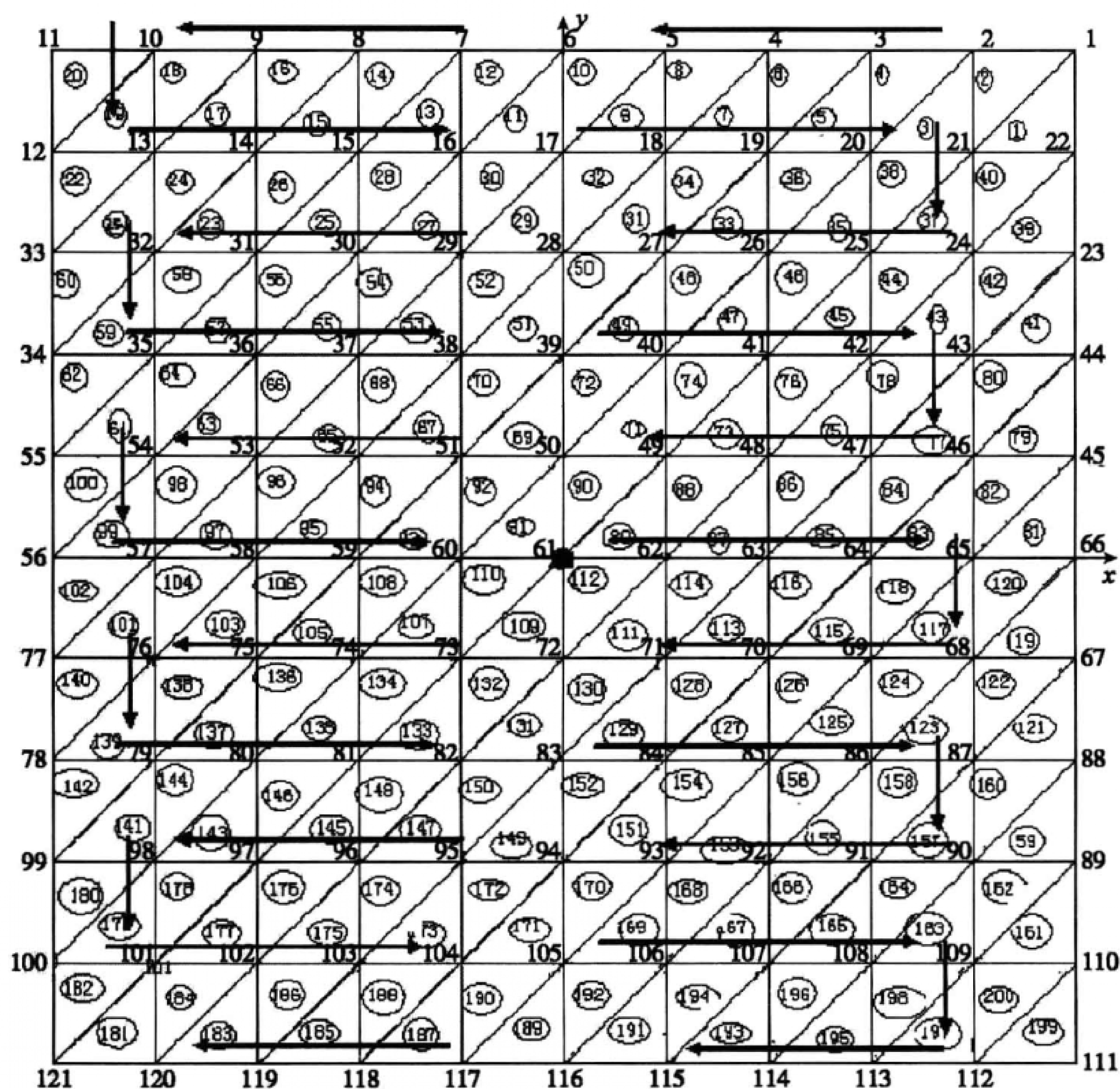



图 6.8　近点线性插值计算循环顺序图

在上面的计算过程中，关键的步骤就是确定邻域的对角线，即算出地表已知点与插值点之间连线的直线方程。

如图 6.9 所示，$a$，$b$，$m$ 三点的空间坐标为已知，那么，可以写出 $b$，$m$ 或者 $a$，$m$ 之间的直线点向式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{6.33}$$

$m$，$n$，$p$ 为方向数，$m=x_2-x_0$，$n=y_2-y_0$，$p=z_2-z_0$。

由以上方程可以得到直线的参数方程

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases} \tag{6.34}$$

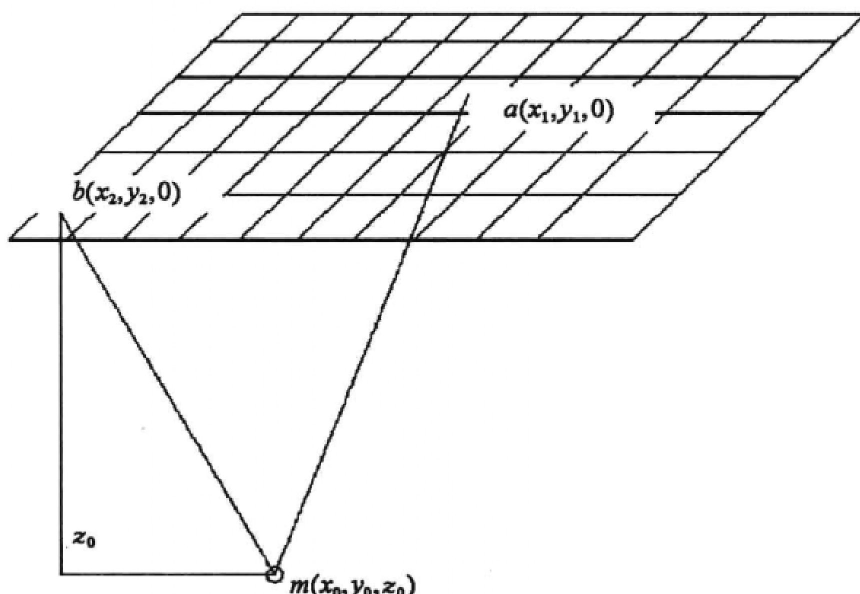



图 6.9　近点线性插值计算方法示意图

对于波场延拓需要的数据点来说，可以事先规定好每次向下延拓的距离，则由此就可以知道 $z$ 值，将该值代入直线参数方程中的第三个方程，即可求得 $t$ 值，再把 $t$ 值代入前两个方程中，就可以把需要点的 $x$，$y$ 值求解出来。

然后我们就可以在以 $b$ 点与 $m$ 点所确定的直线为对角线的立方体范围内，寻找与所求点空间距离最近的一个已知点，用该点的虚拟速度值代替需求点的速度值。

最终，可以得到如图 6.10 的近点线性插值的流程图。

这种三维空间插值方法，它的精度较高，主要受原始数据的数据量多少影响比较大。当然，这种插值方法本质上仍然属于一种线性插值，相比于前面介绍的样条函数插值法以及克里金（Kriging）插值法等方法，显然精度上要低一些，但其优点是插值所耗费的时间非常少，在保持较高精准度的同

时，还保证了很快的计算速度，从而大大提高了这种方法应用于实际的可能性。

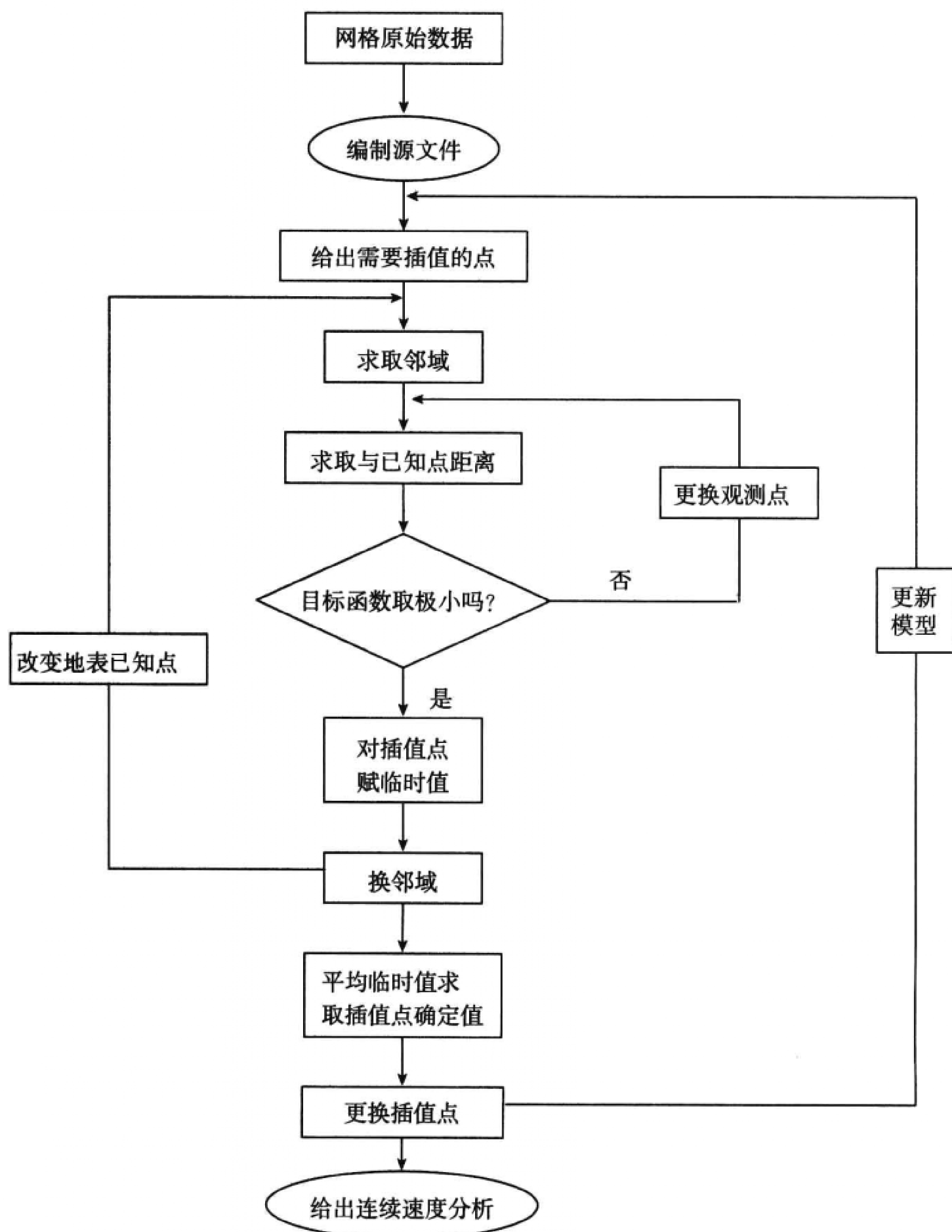
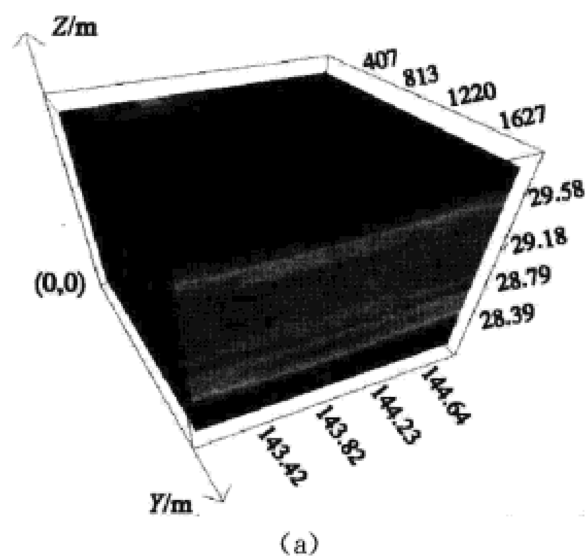


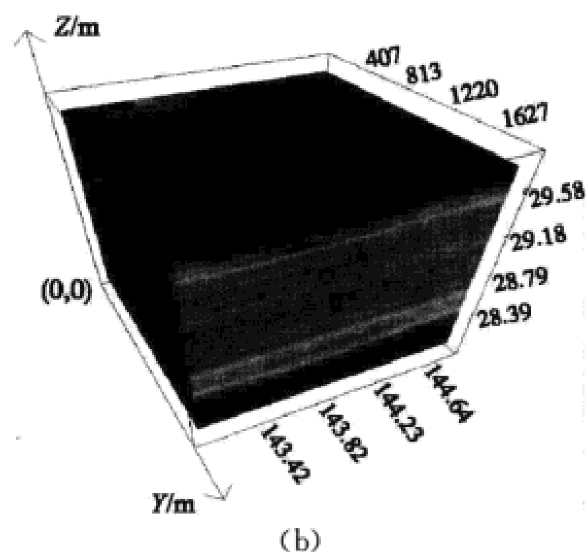

图 6.10 近点线性插值算法流程图

从图 6.11（见彩图）可以看出，下边的插值结果很好地保持了上边的原始数据的基本形态，并且对细节的反映更加清晰一些。

为了更深入地了解该插值方法的准确性，我们再对原始数据体和插值后的数据体进行切片对比，如图 6.12 所示（见彩图）。




(a)




(b)

图 6.11　近点线性插值结果对比图

(a) 原始数据；(b) 插值数据

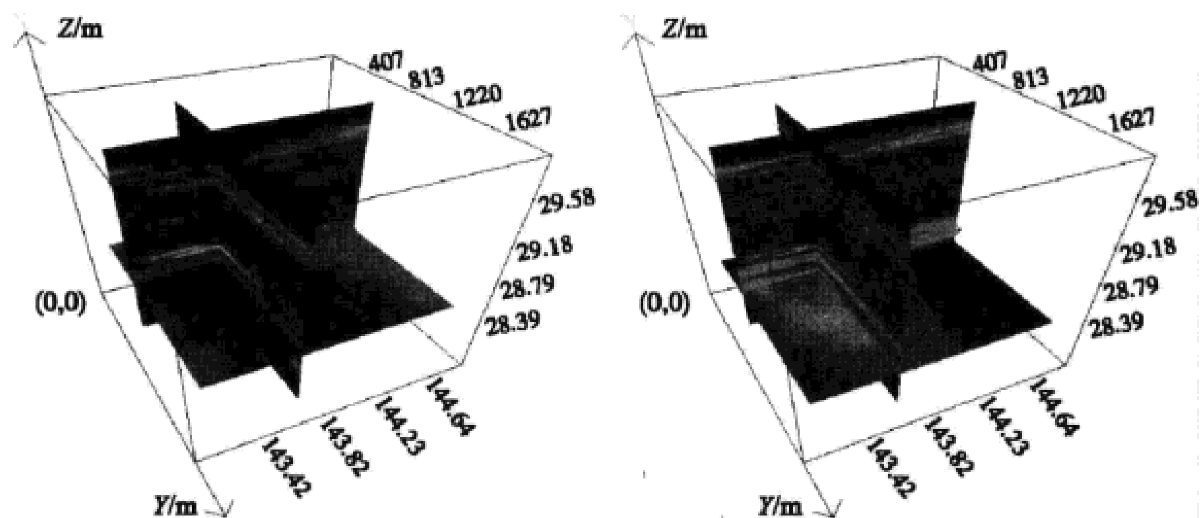



图 6.12　近点线性插值结果切片对比图

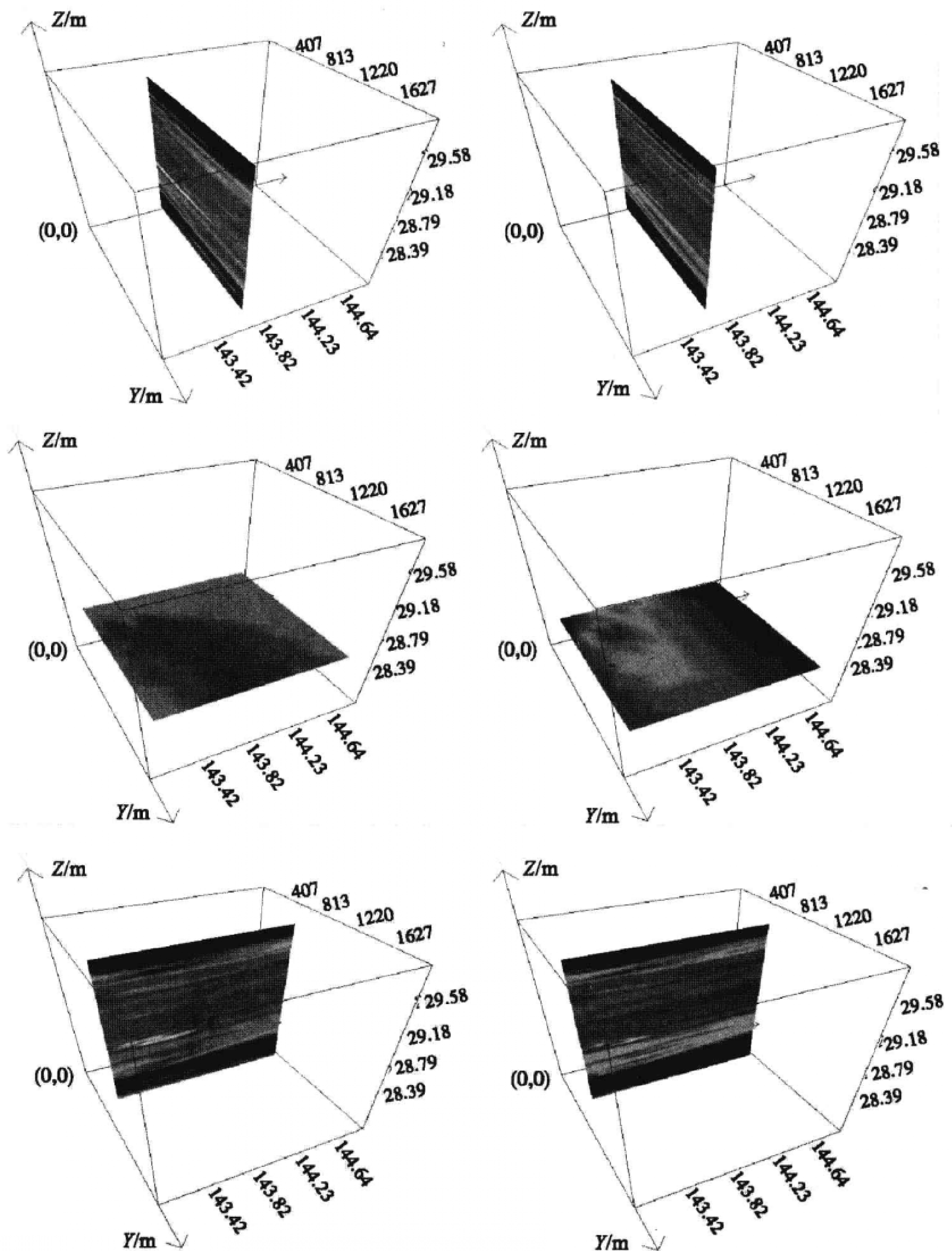



图 6.12　近点线性插值结果切片对比图（续）

从图 6.12 可以看出，在 $X$，$Z$ 方向的切片图中，插值数据的形态基本相同，数值上也和原始数据几乎完全一致，而在 $Y$ 方向的切片图中，插值数据

的形态仍然与原始数据相近，但在数值上有了一定的偏差，这是需要进一步改进的地方。

最后，我们来对这种插值方法做一个有效性评价，本次评价将采用平均估计误差百分比 PAEE 作为交叉验证统计指标。

$$\text{PAEE} = \frac{100\%}{Z_n} \sum_{k=1}^{n} \left[ Z_i^*(x_k) - Z_i(x_k) \right]^2 \tag{6.35}$$

式中，$Z_i^*$ 为位置 $x_k$ 随机变量 $Z_i$ 估计值，$Z_i$（$x_k$）为位置 $x_k$ 上的样点值，$Z_n$ 为样点平均值，$n$ 为样点数。

如果 PAEE 趋向于 0，则认为估计是无偏的。

经过计算，这种方法的平均估计误差百分比 PAEE 为 1.07%，该误差值是很小的，因此可以认为该方法是切实有效的。

# 第 7 章　理论模型成像计算与应用实例

为了更好理解瞬变电磁法拟地震解释技术及偏移成像效果，本章给出了对瞬变电磁理论模型进行偏移成像的数值模拟结果，以及作者近年来的工作实例。

## 7.1　模型计算

### 7.1.1　层状模型

在地表布置面积工作如图 7.1 所示，共布置 11 条剖面，每条剖面布置 11 个测点，取发射回线边长为 200m，时窗采样宽度为 32.5μs～8.7ms，对全部 121 个测点进行正演计算，对所得电磁响应进行波场变换，得到各测点的虚拟波场值，以数据文件的形式输入计算机，计算地电断面上的波场延拓值。

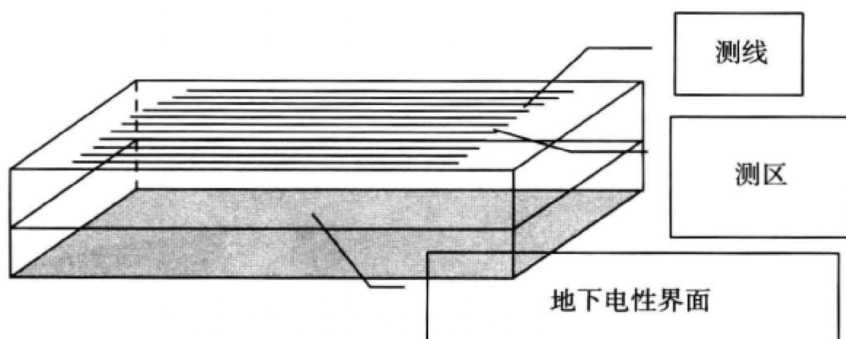



图 7.1　计算模型示意图

瞬变电磁中心回线装置下的一个三层 A 型地电模型的参数为：$\rho_1=50\Omega\cdot m$，$\rho_2=500\Omega\cdot m$，$\rho_3=5000\Omega\cdot m$，$h_1=100m$，$h_2=200m$。在这个模型条件下，对每个测点进行正演计算，得到电磁响应值，之后进行波场变换，为了清楚起见，只对变换后的波峰进行显示，如图 7.2 所示（见彩图）。从图中可以看出，随着虚拟时间 $\tau$ 的增大，虚拟波场出现了两个正的峰值变化，这两个峰值就标示出了这个 A 型地电模型的两个地下分界面的位置。利用每个测点的电磁响应值，用 $v=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\sigma}}$ 计算虚拟速度值。速度计算的结果如图 7.3 所示（见彩图）。可以看到，虚拟速度的分布明显呈现三层分布，与模型的电阻率值分布

是对应的，这是因为虚拟波场的速度值取决于地下电导的分布，因此，虚拟速度表现出与电阻率一致的三层分布规律。

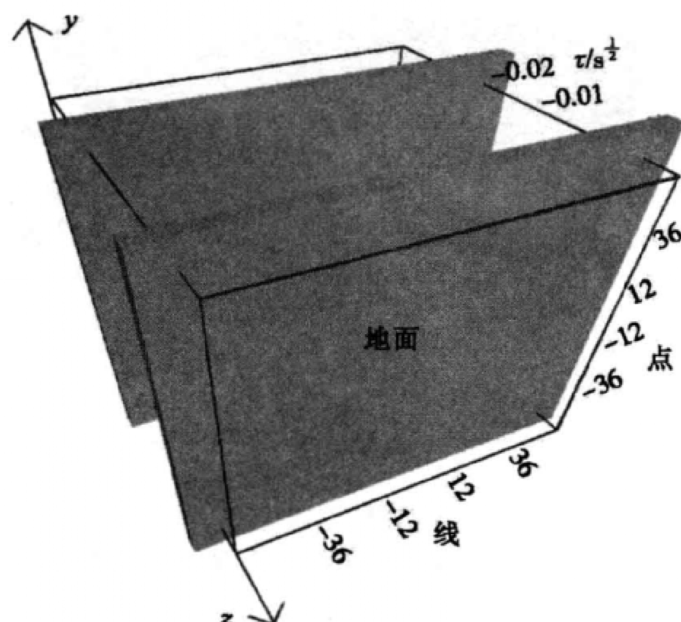



图 7.2　A 型地电模型波场变换结果

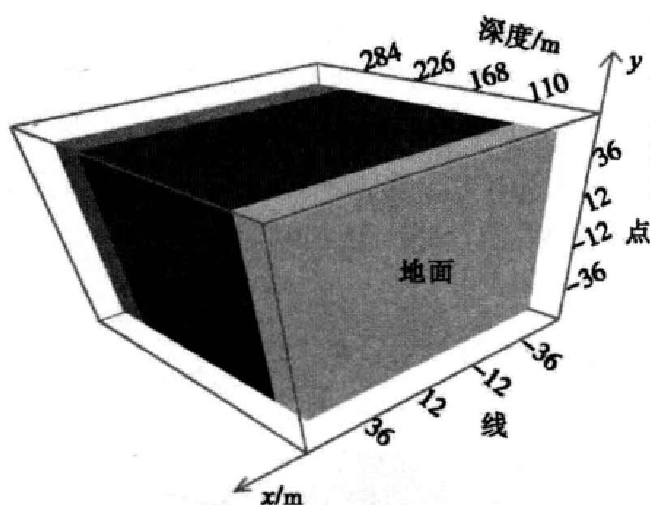



图 7.3　A 型地电模型波场速度分析结果

最后，将三维边界元技术应用于基尔霍夫积分计算中，利用速度分析结果实现三维延拓成像，得到图 7.4（见彩图）所示的结果，两个峰值明显表示出了 A 型地电模型的两个地下分界面的位置。这两个位置所对应的深度也恰好在 100m 与 300m 的附近，与模型的参数基本吻合。

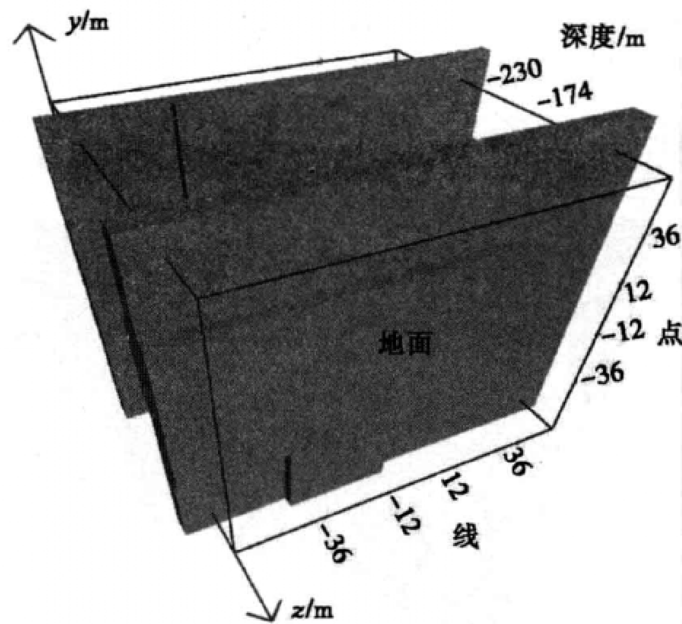
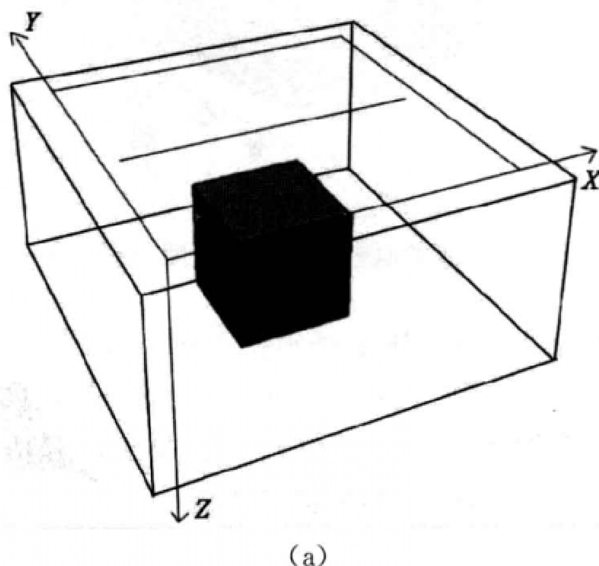



图 7.4　A 型地电模型波场延拓成像结果

### 7.1.2　三维模型

为了验证本文提出方法的有效性，设计了半空间中高阻块状异常体和低阻块状异常体的三维模型，采用中心回线激发，对所得的电磁响应进行波场变换，经合成孔径计算得到合成波场值，最终用三维边界元法实现基尔霍夫偏移成像计算。

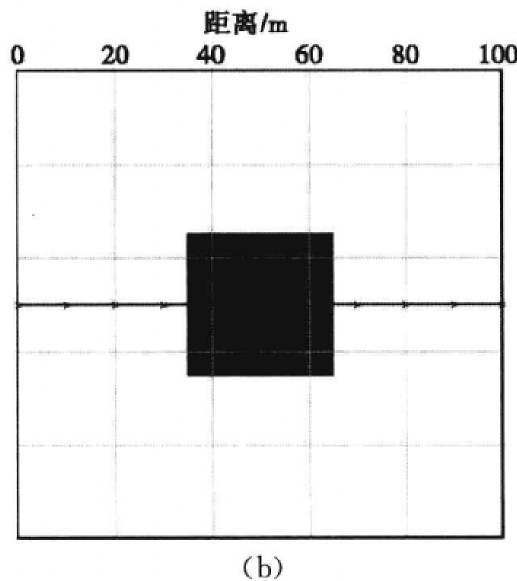
其模型三维示意图如图 7.5（a）所示（见彩图），异常体为 30m×30m×50m 的块体，发射边长为 100m。地表测点分布图如图 7.5（b）所示，图中所示主剖面上共布置 11 个测点，点距为 10m。




(a)

图 7.5　模型三维示意图

(a) 三维模型立体图；(b) 主剖面平面图




(b)

图 7.5　模型三维示意图（续）

1. 高阻异常体

取均匀半空间的电阻率为 $\rho_1=10\Omega\cdot m$，高阻块状异常体电阻率为 $\rho_2=300\Omega\cdot m$，顶板埋深为 70m。首先，用正演方法获得了主剖面上的视电阻率断面图，如图 7.6 所示（见彩图），可以看出高阻异常的中心与模型的位置并

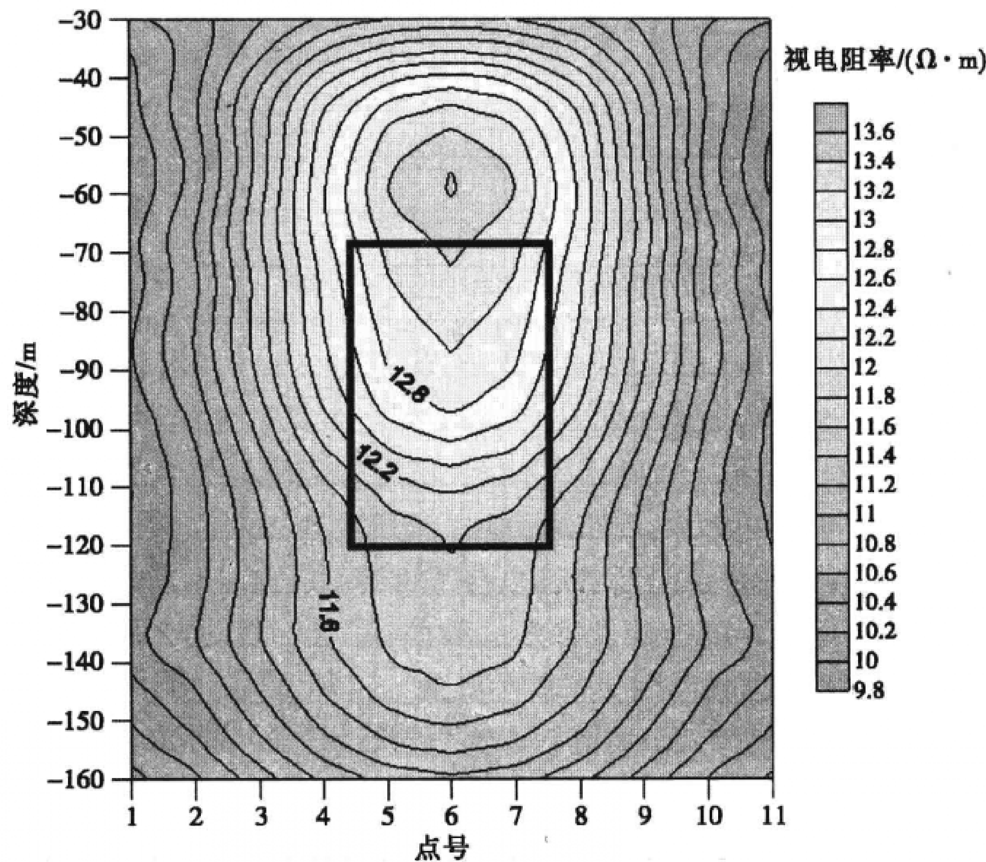
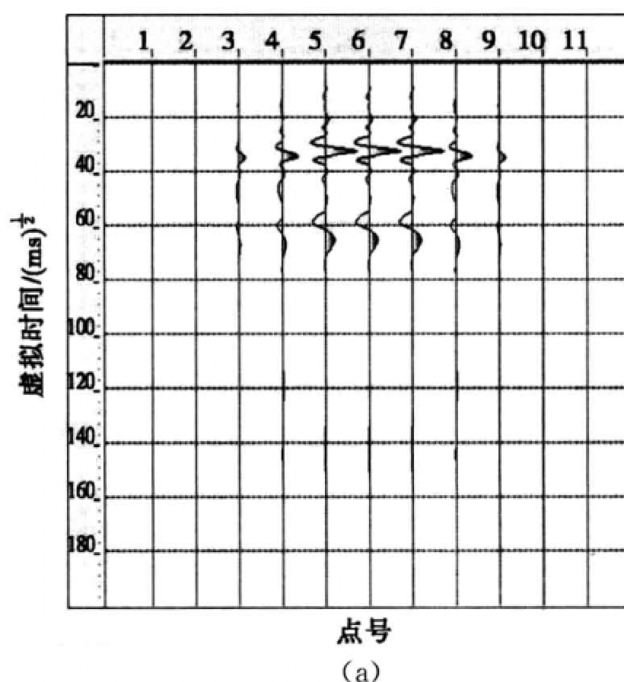


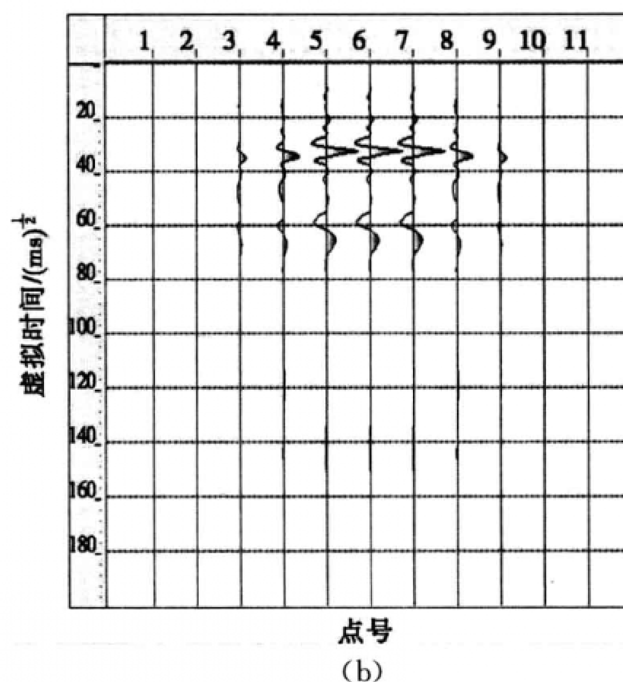

图 7.6　视电阻率剖面

不对应，出现了向上偏移的现象，从电阻率断面图中已经很难确定异常体的位置和大小。

利用瞬变电磁合成孔径算法，对该模型计算了 11 个测点的数据，图 7.7（a）（见彩图）为合成孔径前瞬变电磁波场变换计算结果，图 7.7（b）（见彩




(a)




(b)

图 7.7　模型计算结果

（a）合成孔径成像前波场变换结果；（b）合成孔径后波场变换结果

图）为合成孔径后瞬变电磁波场变换计算结果，对比这两个图，可以看出，在相关性较好的中心部分合成后的波形得到了一定的增强。在相关性不好的边缘部分，波形得到弱化，合成孔径的有效性得到验证。

最后，经过速度分析、波场基尔霍夫偏移成像，得到主剖面上的成像结果，如图 7.8 所示（见彩图）。从图中可以看到，上下两组波峰分别对应在 70m 和 120m 处，这和模型设置吻合很好，纵向分辨率得到了提高。第二界面波形幅值相对第一界面减小了很多，应该是从高阻到低阻本身是弱反射面所致。与以上电阻率断面图相比，它具有更高的分辨率。

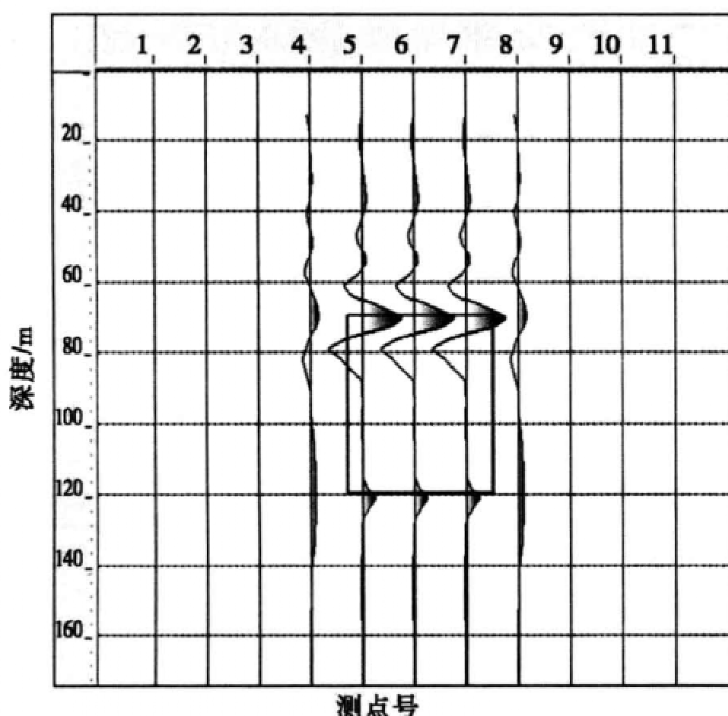



图 7.8　主剖面偏移成像断面图

2. 低阻异常体

均匀半空间的电阻率取为 25Ω·m。低阻异常体电阻率为 5Ω·m，模型大小尺寸不变，将其顶板埋深加大到 120m。主剖面上的视电阻率断面图如图 7.9 所示（见彩图），可以看出低阻异常的中心与模型的位置也不对应，出现了向下偏移的现象，从电阻率断面图确定异常体的位置和大小也会出现偏差。经波场变换、相关合成等一系列处理，得到合成前后的主剖面对比图，如图 7.10 所示（见彩图），可以看出，在相关性较好的中心部分合成后的波形得到了增强。在相关性不好的边缘部分，波形得到弱化，同样也证明了合成孔径的有效性。

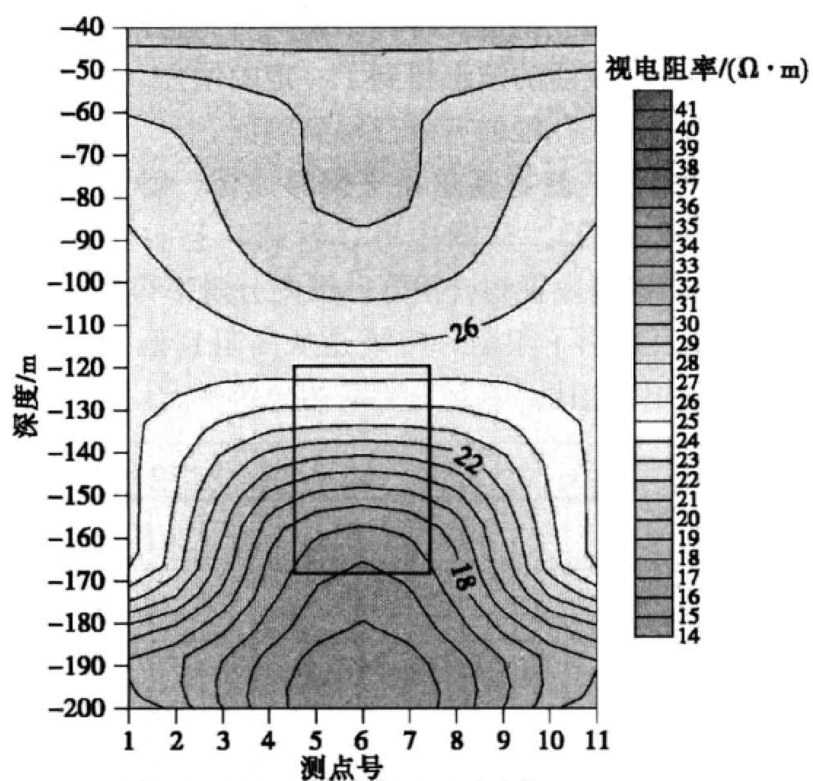
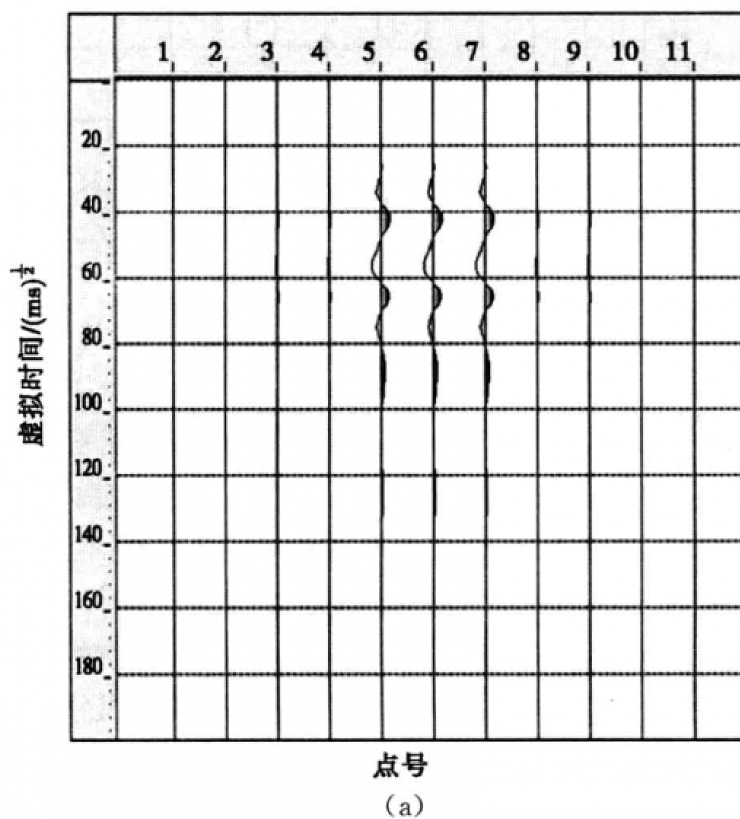


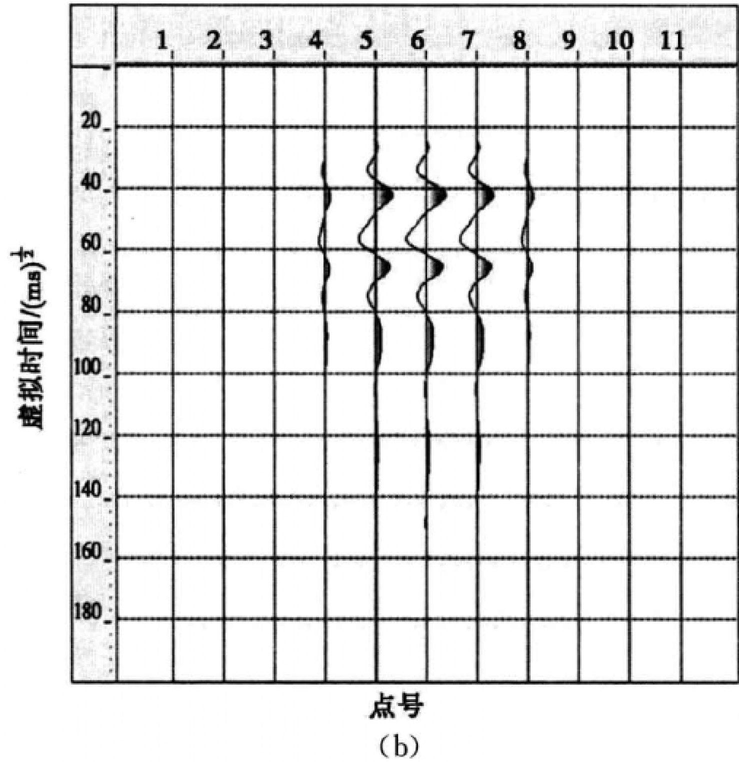

图 7.9　视电阻率剖面




(a)

图 7.10　模型计算结果

(a) 合成孔径成像前波场变换结果；(b) 合成孔径后波场变换结果




(b)

图 7.10　模型计算结果（续）

图 7.11（见彩图）给出了偏移成像结果，我们可以看出两个界面的存在，但是由于深度加大而且低阻模型体波形出现展宽现象，位置向下略有偏移。

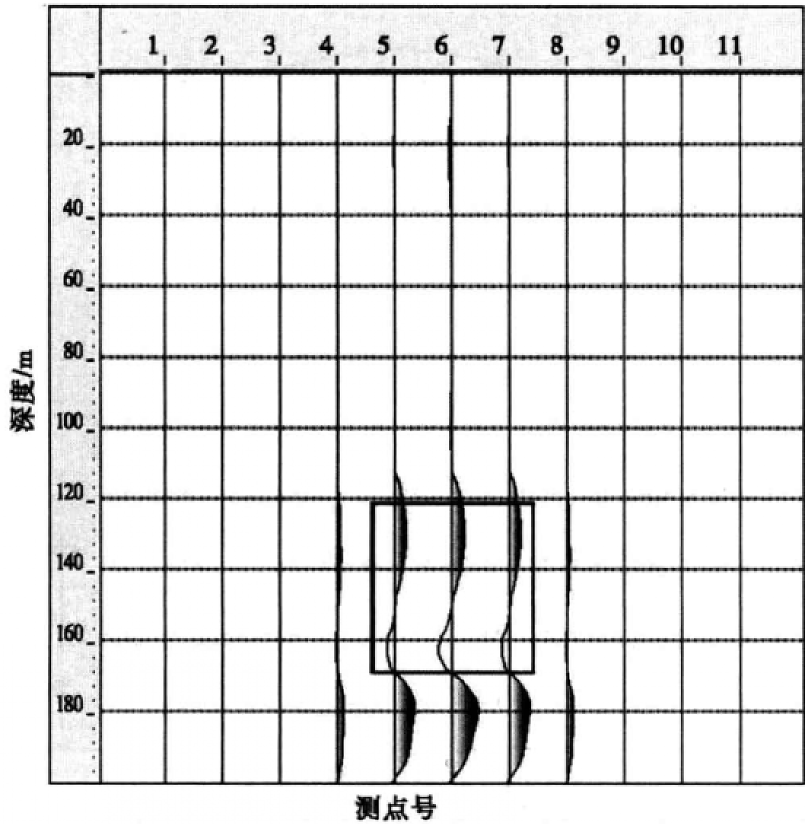



图 7.11　主剖面偏移成像断面图

## 7.2 应用实例

### 7.2.1 隧道超前预报实例

锦屏水电枢纽工程辅助洞位于四川省凉山彝族自治州的木里、盐源、冕宁三县交界处的雅砻江干流锦屏大河湾上，辅助洞工程地处青藏高原向四川盆地过渡地貌斜坡地带，沿线地形起伏，高程均在3000m以上，最高山峰达4125m，埋深大于1500m的洞段长度约12875m，占全洞长度的73.1%，地质条件非常复杂。为了探明辅助洞的水体不良地质体，在辅助洞不同的掌子面上，布置了四条剖面［A洞掌子面（里程AK11＋843）、A洞掌子面（里程AK11＋447）、A洞掌子面（里程AK11＋598）、横通道（7－2＃）剖面］通过对锦屏水电枢纽工程辅助洞的探测实验，验证本项目提出方法的有效性。

瞬变电磁超前地质预报测线布置如图7.12所示（见彩图），在一个框内测量5条测线，每条测线上测量3～5个点，然后移动线框，重复上面的步骤，直到将整个掌子面测完。多条测线测量不仅可以保证资料的充分，同时对连续速度分析以及延拓成像来说也是确保源数据可以构成空间目标体的必要条件。

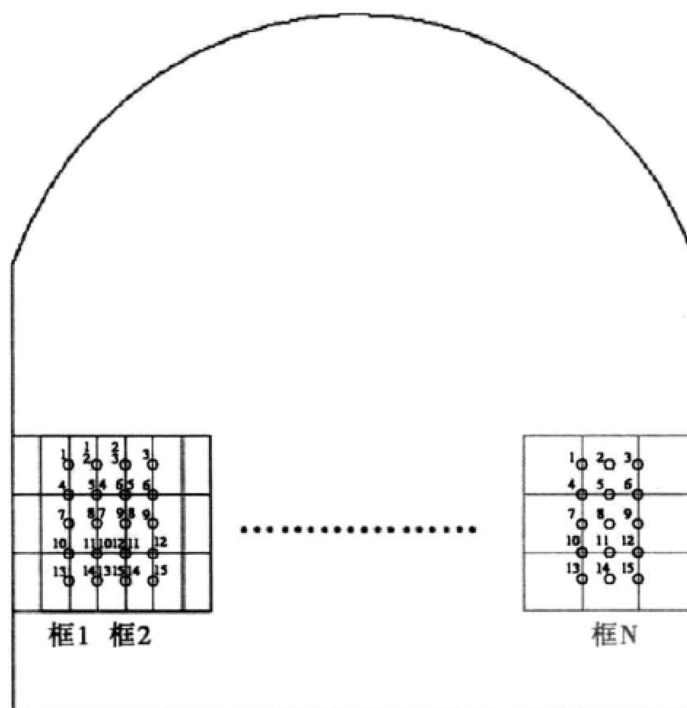



图7.12 瞬变电磁测线布置图

首先我们根据实测的电磁响应值计算出一套初始的虚拟速度值，然后进行两次三维空间插值计算，完成速度分析。速度分析的结果如图 7.13 所示（见彩图）。可以看到，虚拟速度的分布大致呈现为三层分布，分别在 7m 与 30m 左右的地方出现大的数值变化，其规律和电阻率分布关系是相对应的。这是因为虚拟波场的速度值取决于地下电导的分布，而电导又与纵向电导密切关系，纵向电导与电阻率为倒数关系，因此，虚拟速度表现出与电阻率一致的三层分布规律。

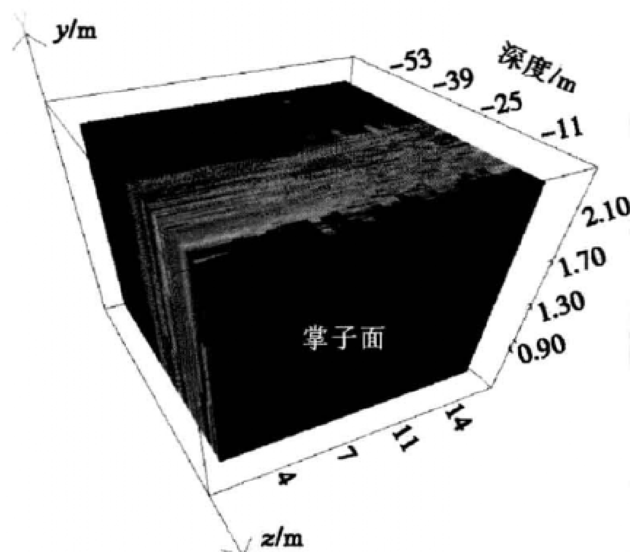



图 7.13　虚拟波场速度分析三维结果

接下来对采集到的实际数据做波场变换，波场变换的结果如图 7.14 所示（见彩图），可以看到，曲线充分显示除了波的特性，出现了多个波峰和波谷。

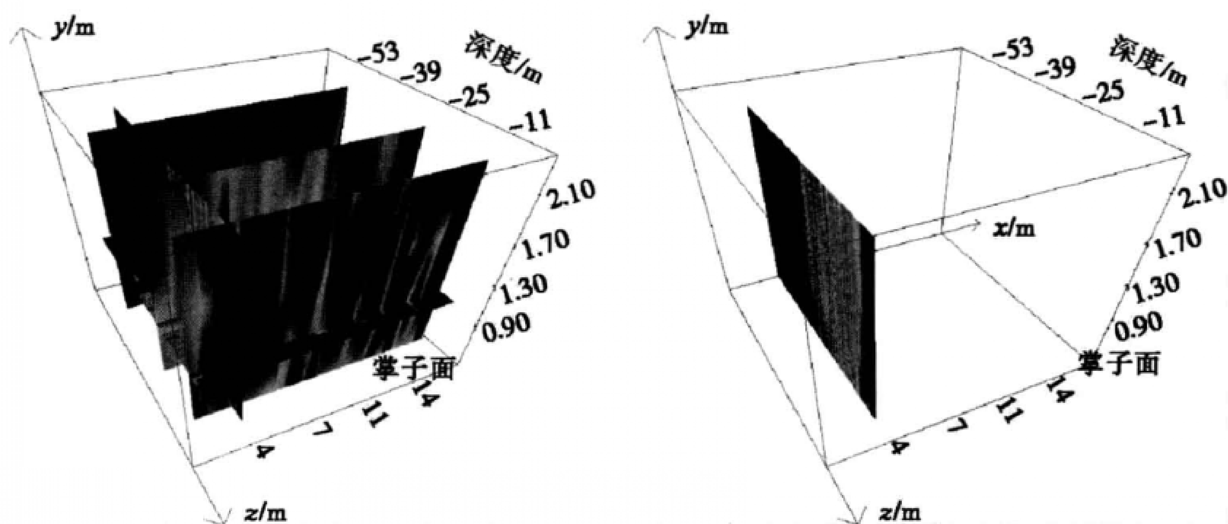



图 7.14　实测资料虚拟波场三维切片结果

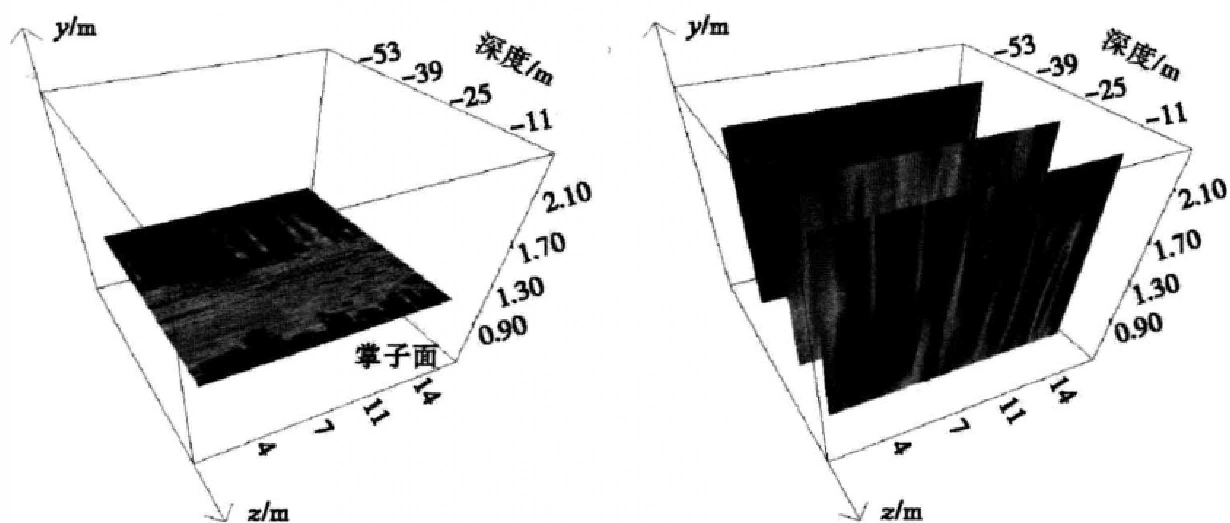



图 7.14　实测资料虚拟波场三维切片结果（续）

把波场变换的结果用三维镂空技术显示，只保留与水体不良地质体相对应的低能部分，如图 7.15 所示（见彩图），可以看到它清晰的反映出了几层界面，且其形态有一定的显示。

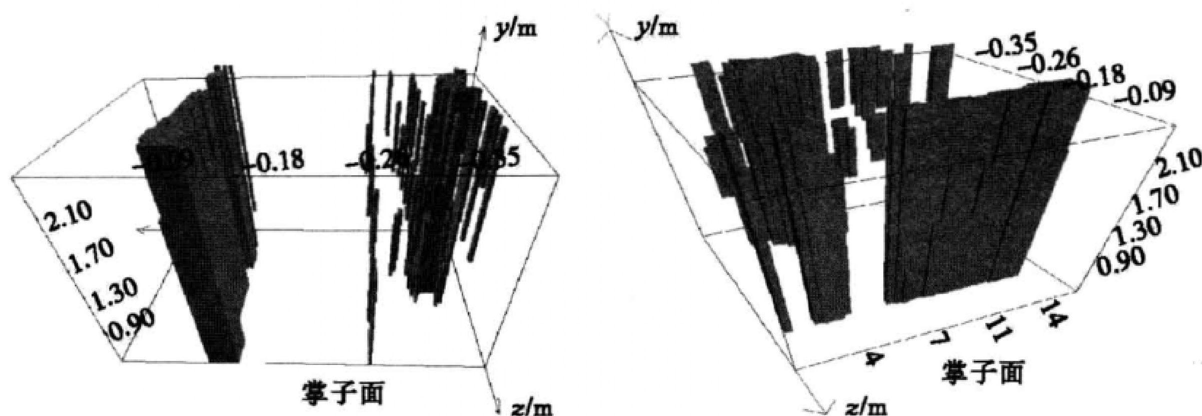



图 7.15　不同方位水体不良地质体波场变换三维结果

同样，可以把延拓的结果用三维镂空方法显示，如图 7.16（见彩图）清晰的在 7m 左右位置与 20～35m 范围内反映出了水体不良地质体的三维空间分布。

最终与该实际测量面前方已知的情况对比，可以确定，这个经过一系列波场变换，速度分析以及延拓成像后得到的结果与实际情况吻合得很好。

### 7.2.2　煤矿采空区探测实例

1. 实例 1

在煤矿开采过程中，积水、采空区、陷落柱等水体病害一直困扰着生产。在山西某煤矿区开展采空区调查，目的是要搞清煤田地下充水采空区的采空深度、采空高度、分布范围，避免在采掘过程中发生突水灾害。

勘查区表层主要被第四系黄土覆盖，厚度一般不超过 20m，下伏地层主要

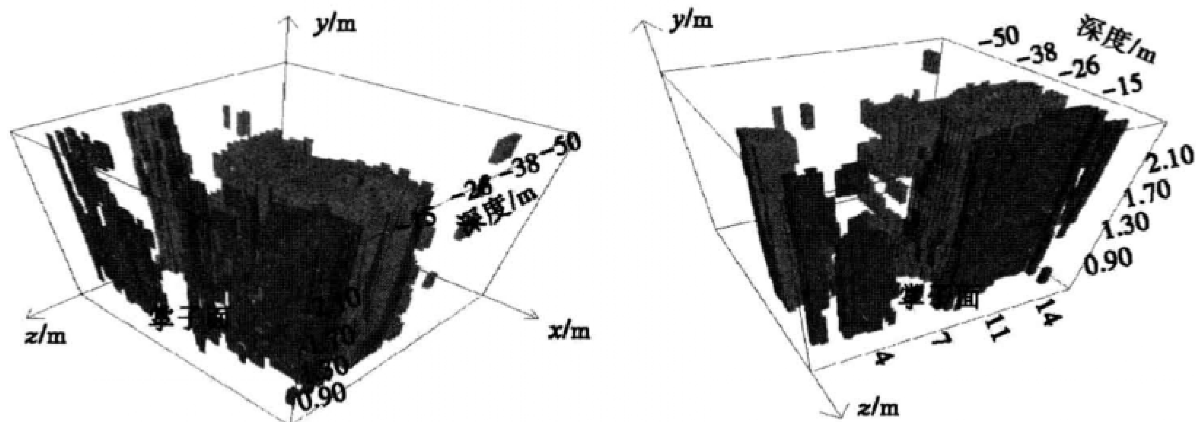


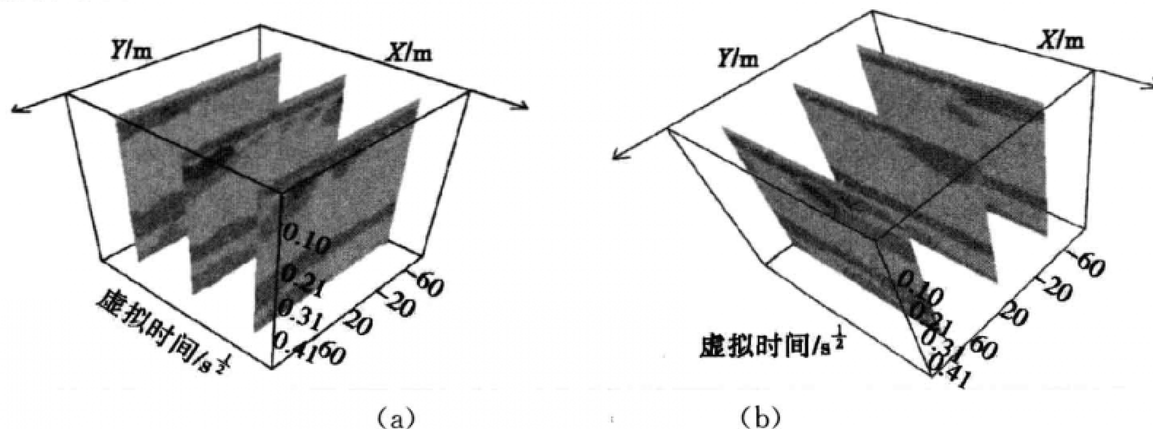

图 7.16　水体不良地质体延拓成像三维结果

为第三系砂砾岩层、二叠系砂泥岩夹煤系、石炭系砂泥岩夹煤系地层及奥陶系灰岩地层，该区分布的主要煤层有两层，分别位于地下 150m 和 260m 处。各地层岩矿石电阻率差异较小，难以引起明显的电阻率异常，当地下煤体局部被采出后，在岩体内形成一个有一定规模的空间，使周围的应力平稳状态遭受破坏，产生局部的应力集中，采空区顶板在上覆岩层压力的作用下，发生变形、断裂、位移、冒落，形成的冒落带、断裂带、变形弯曲带，在地下水的充填及地表水沿裂缝向采空区渗漏，其电阻率将明显发生变化，形成一个低阻电性体，也与围岩电性形成较明显的差异，这样就为采空区的勘查提供了前提条件。

根据该工区附近的采空区的埋藏深度和厚度情况，结合瞬变电磁特点，选择大定源回线装置，发射回线边长为 200m，测线间距为 20m，测点间距为 20m，布置了面积工作。

(1) 波场变换结果

图 7.17（见彩图）是经波场变换，并做均衡处理、反褶积、多点平滑后最终的三维成像全图，波场值颜色深的部分为虚拟波能量高的区域，也是反射界面所在处。




(a)　　　　　　　　(b)

图 7.17　波场三维成像效果图

(a) X 方向切片；(b) Y 方向切片

(2) 波场延拓成像结果

为了更好地展示采空区的空间分布，将波场延拓成像的结果采用两种显示方式，一种是去掉低能反射（低速或者低阻分布）部分，如图 7.18 (a) 所示（见彩图），可以清楚地显示采空区在上下围岩中的分布位置。另一种是去掉高能反射（高速或者高阻分布）部分，如图 7.18 (b) 所示（见彩图），展示出了采空区的空间分布形态。通过对成像结果进行解释，认为有两层采空区分布，上层采空区位于地下 140m 处，充水较少，冒落带部分范围小；下层采空区位于地下 260m 处，充水较多，冒落带部分范围大，由于充水的影响，导致低阻异常放大，采空区的分布范围也会有一定的放大。经验证解释结果与实际地质情况吻合较好，这也证明了本书算法的有效性。

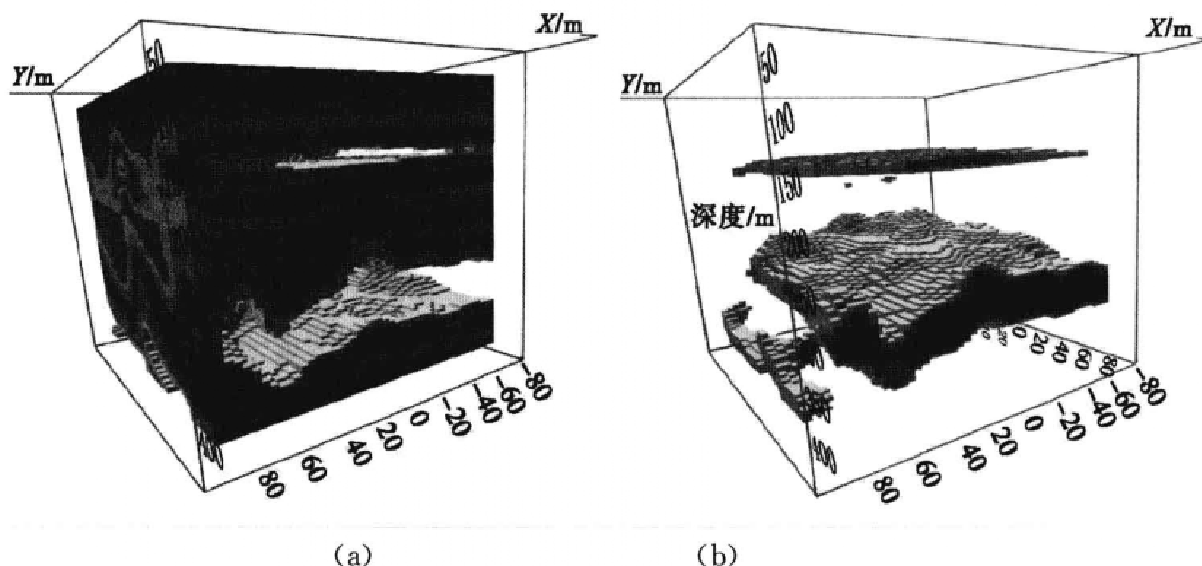



图 7.18　三维延拓成像效果

(a) 去掉低能反射部分；(b) 去掉高能反射部分

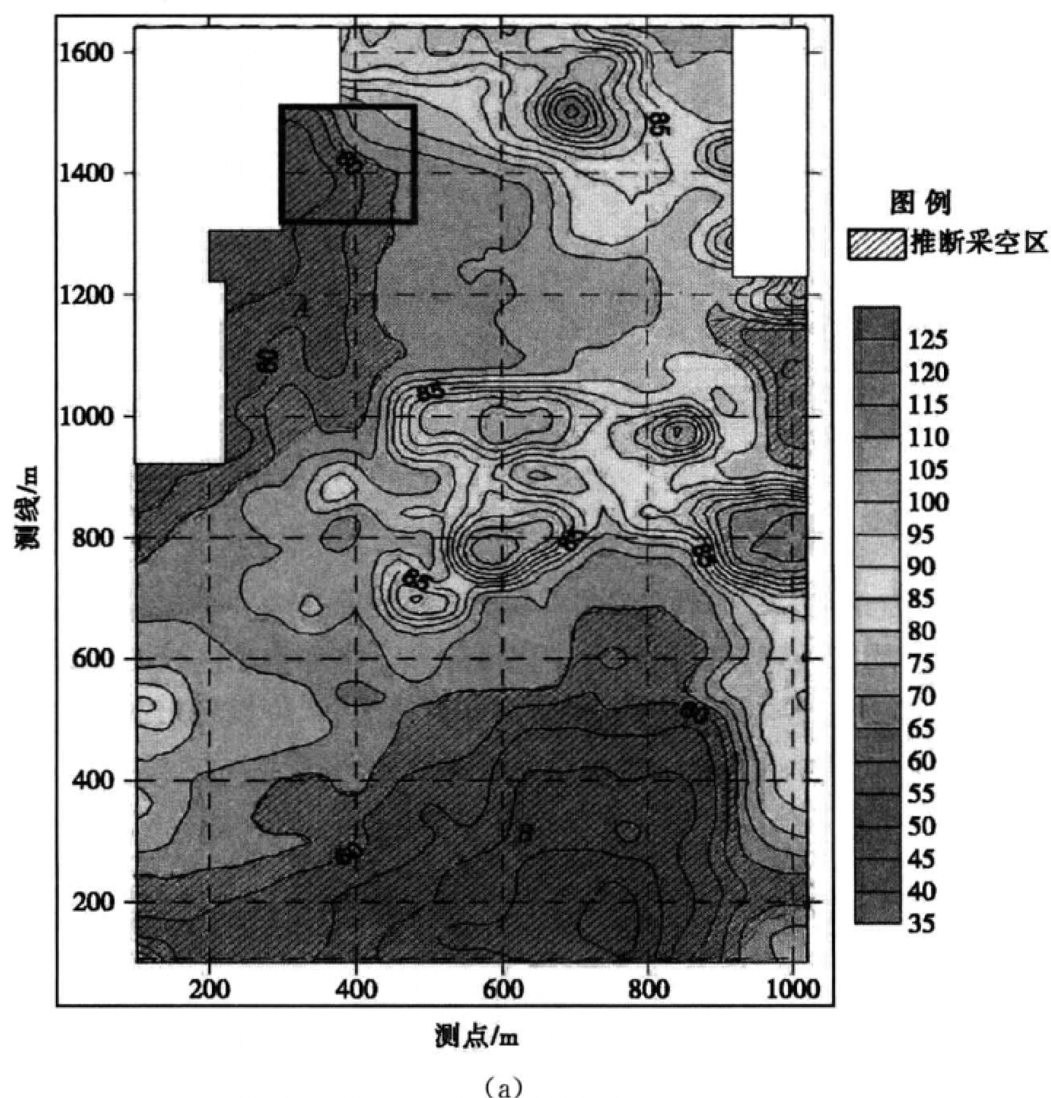
2. 实例 2

对于山西很多地方煤矿，在煤矿开采过程中，煤矿积水、陷落柱、采空区等矿井地质灾害长期以来一直困扰着生产，严重影响着矿井的生产建设。需要采用瞬变电磁法对煤矿的采空区做系统的研究，探明其范围和埋深。

工作中使用的仪器为 GDP－32II 电法工作站。考虑到工区的实际地质情况及所需探测的地质体，采用瞬变电磁法进行探测。工作中根据实际试验情况，结合瞬变电磁特点，选择采用大定源回线装置。其发射边框采用边长较大的矩形回线（边长 300m），而接收采用专用的瞬变电磁探头接收（接收面积 $2000m^2$）。发送频率为 25Hz，时间范围为 0.087～8ms，其中测线间距为 20m，测点间距为 20m。

图 7.19 (a)（见彩图）是视电阻率平面图，由图可知，在测区的西北部、

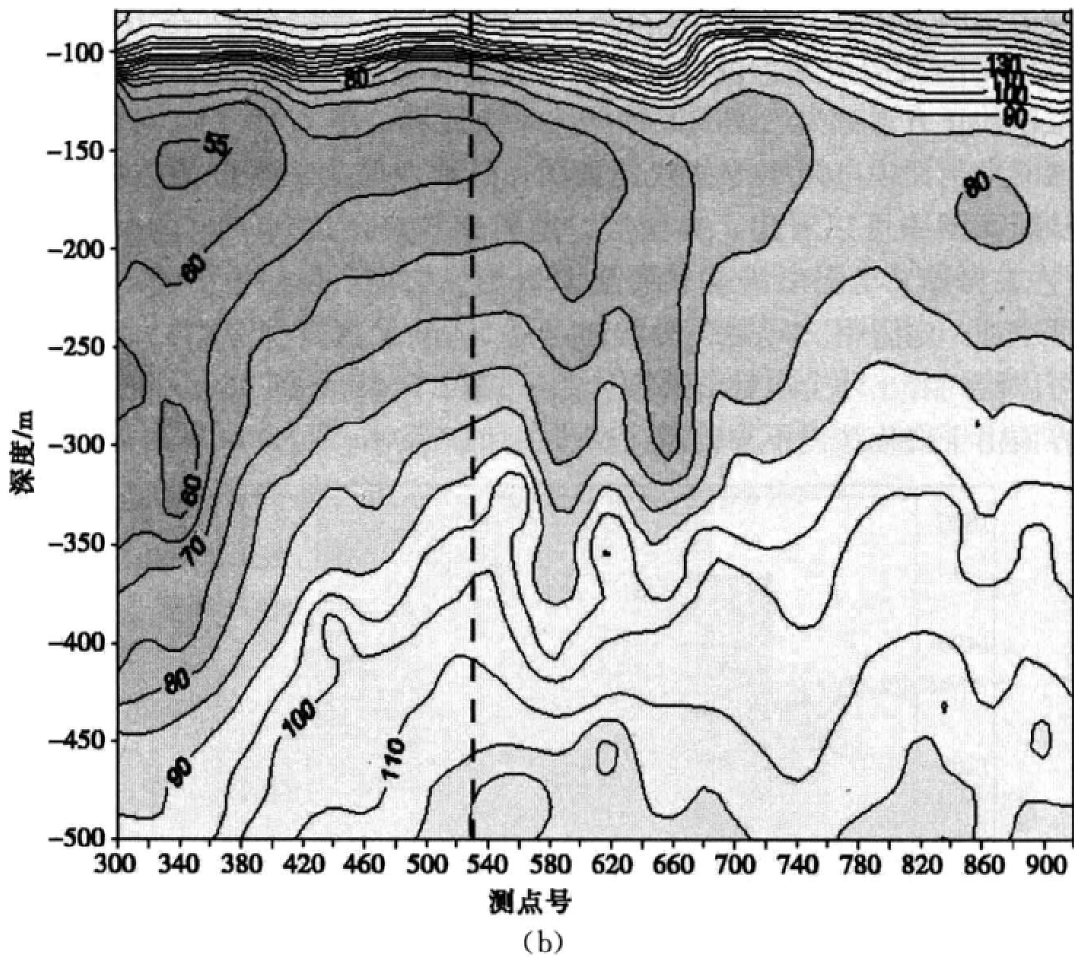
东南部出现两个比较明显的低阻异常区，推测是由于采空区充水引起。参考全区视电阻率断面图成果，以 65Ω·m 等值线圈定两个低阻区，即 $A$ 和 $B$ 区。图中红色的正方形框为三维成像数据体采集区域。图 7.19（b）（见彩图）为该区域的主剖面视电阻率等值线断面图，红线左侧为三维成像数据体采集区域，从断面图中可以看出，在浅层，电阻率较高，达到 100Ω·m 以上。从 120m 左右开始，电阻率快速下降至 150m 处达到极小，约为 55Ω·m。之后随深度增加，电阻率又开始缓慢增加，至 500m 又恢复到 100Ω·m 左右。从图中可以隐约看出两个电性分界面，第一层位于 130m 到 160m 深度附近，第二层界面由于变化缓慢不易确定，初步估计在 250m 到 350m 深附近。




(a)

图 7.19　工区成果图

(a) 视电阻率平面图；(b) 典型剖面视电阻率等值线断面图




(b)

图 7.19 工区成果图（续）

将工区 1300～1500 号线的 300～500 点的数据组成一个三维数据体，经波场变换和适当均衡处理后，进行合成孔径计算，得到整个区域的合成孔径波场三维像图，其镂空效果图如图 7.20 所示（见彩图），可以看出在经过相关叠加后，突出了有用信号，增强了信噪比，成像效果明显。

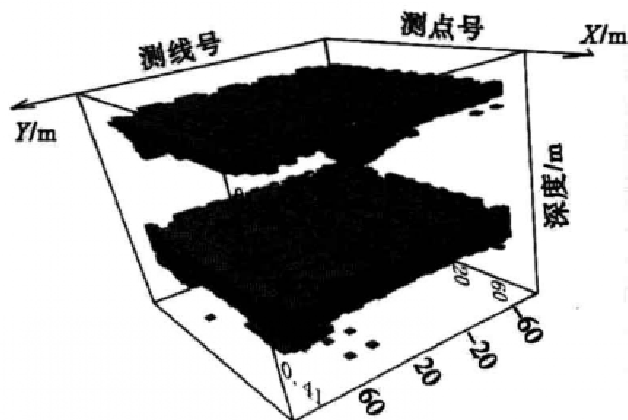
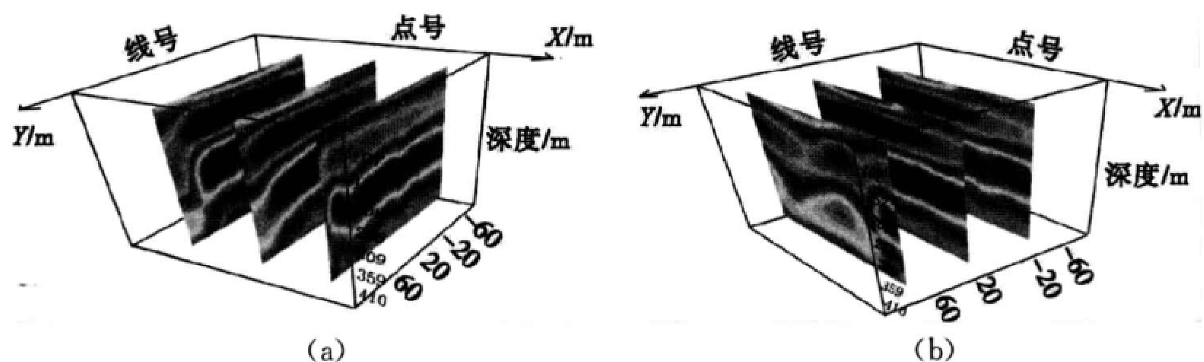



图 7.20 典型地段成像三维镂空图

将合成后的数据进行偏移成像，得到以深度为纵轴的三维成像图，如图

7.21 所示（见彩图）。图中蓝色代表波场负值区，蓝色越深则表示负值越大；红色代表波场正值区；而黄色、绿色为过渡色，表示波动幅值较小的地方。从图中可以看到，和电阻率的断面图相比，此时的分层已经非常明显，通过对成像结果进行解释，认为有两层采空区分布，上层采空区顶板位于地下 140m 处；下层采空区顶板位于地下 280m 处，由于充水的影响，导致低阻异常放大，采空区的分布范围也会有一定的放大。经验证解释结果与实际地质情况吻合较好，充分证明了波场变换后合成孔径方法的有效性。




(a)　　　　　　　　　　(b)

图 7.21　三维波场成像效果图

(a) X 方向切片；(b) Y 方向切片

# 参考文献

白登海，Maxwell，Meju A，等．2003. 时间域瞬变电磁法中心方式全程视电阻率的数值计算．地球物理学报，46（5）：697－704

别尔季切夫斯基 M H，日丹诺夫 M C. 1985. 地球变化电磁场异常的解释. 北京：地质出版社

曹冰河．2004. 瞬变电磁法成果资料快捷解释方法．物探与化探，28（2）：136－138

陈伯舫，侯作中，范国华．1998. 有限差分法计算三维地形影响的电磁感应．地震学报，20（5）：541－544

陈本池，周凤桐，李金铭．1999. 瞬变电磁场的波场变换研究．物探与化探，（3）：36－42

陈明生．1999. 点偶源瞬彼岸电磁测深（一）．煤田地质与勘探，27（1）：55－59

陈明生，李正斌．1999. 瞬变电磁法资料的联合时-频分析初探．煤田地质与勘探，27（3）：55－57

方文藻，李予国，李貅．1993. 瞬变电磁测深法原理．西安：西北工业大学出版社

冯恩信．2005. 电磁场与电磁波．第 2 版．西安：西安交通大学出版社

付君眉．2000. 高等电磁理论．西安：西安交通大学出版社

郭文波．2001. 瞬变电磁拟地震解释法研究．西安：长安大学地测学院

郭文波，李貅，薛国强，等．2005. 瞬变电磁快速成像解释系统研究．地球物理学报，48（6）：1400－1405

郭文波，宋建平，韩俊明，等．2006. 中心回线瞬变电磁探测的一种快速解释方法．物探与化探，30（2）：154－157

何继善．1997. 电法勘探的发展和展望．地球物理学报，40（增刊）：308－316

霍全明等．1994. 瞬变电磁法在煤矿水害预测防治中的应用．西安：西北工业大学出版社

嵇艳鞠，林君，程德福，等．2003. 瞬变电磁法中数据取样处理方法的研究．物探与化探，27（2）：142－145

蒋邦远．1998. 实用近区磁源瞬变电磁法勘探．北京：地质出版社

考夫曼 A A，凯勒 G V. 1987. 频率域和时间域电磁测深．王建谋译．北京：地质出版社

克维亚特柯夫斯基 E M. 1959. 电法勘探．王恕铭译．北京：地质出版社

李貅．2002. 瞬变电磁测深的理论与应用．西安：陕西科学技术出版社

李貅．2005. 瞬变电磁虚拟波场的三维曲面延拓成像研究．西安：西安交通大学博士学位论文

李貅，冯兵．2003. 应用地球物理基础教程．西安：陕西人民教育出版社

李貅，郭文波，胡建平．2001. 瞬变电磁测深快速拟地震解释方法及应用效果．西安工程学院学报，23（3）：42－45

李貅，戚志鹏，薛国强，等．2010. 瞬变电磁虚拟波场的三维曲面延拓成像．地球物理学报，53（12）：3005－3011

李貅，宋建平，马宇，等．2005a. 基于小波分析的 TEM 信号提取．煤田地质与勘探，33（2）：72－75

李貅，薛国强，宋建平，等．2005b. 从瞬变电磁场到波场的优化算法. 地球物理学报，48（5）：1185－1190

林君，于生宝，嵇艳鞠．2004. 瞬变电磁测深系统研究的新进展．中国地球物理学会第二十届年会论文集．西安：西安地图出版社．563

柳建新，刘春明，童艳光．2004. 强场磁源瞬变电磁仪在某铜矿的试验性应用．物探与化探，28（2）：130－132

吕国印．1998. 瞬变电磁法二维逆时电磁偏移．物探与化探，22（2）：139－142

马特维耶夫．1978. 电磁测深解释．北京：煤炭工业出版社

米萨克 N·纳比吉安．1992. 勘查地球物理电磁法．赵经祥等译．北京：地质出版社

牛之琏．1986. 脉冲感应瞬变电磁法及应用．长沙：中南工业大学出版社

牛之琏．1992. 时间域电磁法原理．长沙：中南工业大学出版社

朴化荣．1990. 电磁测深法原理．北京：地质出版社

苏朱刘，张交东，胡文宝．2004. 瞬变电磁中磁场的特性及测量方法. 工程地球物理学报，1（1）：70－73

王华军．2003.　一维瞬变电磁正反演研究．西安交通大学博士学位论文

王华军，罗延钟．2003. 中心回线瞬变电磁法 2.5 维有限单元算法．地球物理学报，46（6）：855－862

王家映．1990. 大地电磁拟地震解释法．北京：石油工业出版社

王家映，Oldenburg D，Levy S. 1985. 大地电磁的拟地震解释法．石油地球物理勘探，20（1）：66－79

王家映，方胜．1986. 关于大地电磁的平均速度问题．石油物探，25（1）：84－79

王庆乙．1999. 3S 瞬变电磁测深系统的研制．有色金属矿产与勘查，65（3）：169－175

王彦飞．2007. 反演问题的计算方法及其应用．北京：高等教育出版社

沃德 S H. 1978. 地球物理用电磁理论．北京：地质出版社

肖庭延，于慎根，王彦飞．2003. 反问题的数值解法．北京：科学出版社

许炳如，纪英楠．1993. 电磁场原理与计算．西安：西北工业大学出版社

薛国强．2005. 回线源瞬变电磁法对地成像方法研究．西安：西安交通大学博士学位论文

薛国强，李貅．2011. 瞬变电磁拟地震子波宽度压缩研究．地球物理学报，54（5）：1384－1390

薛国强，李貅，底青云，等．2006. 从瞬变电磁扩散场向平面波场的等效转换．地球物理学报，49（5）：1539－1545

薛国强，宋建平，李貅，等．2004. 回线源瞬变电磁成像的理论分析及数值计算．地球物理学报，47（2）：338－343

闫述．2004. 有耗分层媒质上瞬变电磁测深的联合时-频解释．煤田地质与勘探，32：48－51

闫述，陈明生，付君眉．2002. 瞬变电磁场的直接时域数值分析．地球物理学报，45（2）：275－284

严良俊，徐世哲，胡文宝，等．2003. 中心回线瞬变电磁法全区视纵向电导解释方法．浙江大学学报，30（2）：239－243

殷长春，刘斌．1994. 瞬变电磁法三维问题正演及激电效应特征研究．地球物理学报，37（增 I）：486－492

于景邨．2007. 矿井瞬变电磁法勘探．徐州：中国矿业大学出版社

于鹏，王家林．2001. 有限差分法大地电磁多参数偏移成像．地球物理学报，44（4）：552－562

于鹏，王家林，吴健生．2003. 大地电磁场成像方法综述与新进展．地球物理学进展，18（1）：53－58

Christensen N B. 2002. A generic 1－D imaging method for transient electromagnetic data. Geophysics，67（2）：438－447

de Hoop A T. 1996. Transient electromagnetic vs. seismic prospecting—a correspondence principle. Geophysical Prospecting，44（6）：987－995

Eaton P A，Hohmann G W. 1987. An evaluation of electromagnetic methods in the presence of geologic noise. Geophysics，52（8）：1106－1126

Eaton P A，Hohmann G W. 1989. A rapid inversion technique for transient electromagnetic sounding. Physics of the Earth and Planetary Interiors，53（1989）：394－404

Gershenson M. 1993. Simple interpretation of time-domain electromagnetic sounding using similarities between wave and diffusion propagation. Geophysics，62（3）：763－774

Guo Q，Xue J P，Song X，et al. 2004. Detecting shallow caverns in China using TEM . The Leading Edge，23（7）：694－695

Guo W B，Xue G Q，Li X，et al. 2012. Correlation analysis and imaging technique of TEM data. Exploration Geophysics，43（2012）：137－148

Kunetz G. 1972. Processing and interpretation of magnetotelluric sounding. Geophysics，37（6）：1005－1021

Lee K H. 1989. A new approach to modeling the electromagnetic response of conductive medium. Geophysics，54（9）：1180－1192

Lee S，Memechan G A. 1987. Phase-field imaging：the electromagnetic equivalent of seismic migration. Geophysics，52（5）：678－693

Lee H K，Xie A. 1993. A new approach to imaging with low-frequency electromagnetic. Geophysics，58（4）：780－786

Lee K H，Liu G，Morrison H F. 1989. A new approach to modeling the electromagnetic response of conductive media. Geophysics，54（6）：1180－1192

Levy S，Oldenburg D，Wang J. 1988. Subsurface imaging using magnetotelluric data. Geophysics，53（1）：104－117

Li X，Xue G Q，Song J P，et al. 2005. Application of the adaptive shrinkage genetic algorithm in the feasible region to TEM conductive thin layer inversion. Applied Geophysics，2（4）：204－210

Lin J, Cheng D F, Liu G X. 2000. Development of the array transient electromagnetic system and its experiments. Journal of Geoscientific Research in North East Asin, 3 (1): 99 - 106

Macnae J C. 1987. An atlas of primary fields due to fixed transmitter loop EM source. Crone limited Technical Note

Maxwell, Meju A. 1998. A simple method of transient electromagnetic data analysis. Geophysics, 63 (2): 405 - 410

Meerbergen K, Coyette J P. 2009. Connection and comparison between frequency shift time integration and a spectral transformation preconditioner. Numerical Linear Algebra with Applications, 16 (1): 1 - 17

Peacock K L, Treitel S. 1969. Predictive deconvolution-theory and practices. Geophysics, 34 (2): 155

Rabinovich M B. 1995. Error of 1 - D interpretation of 3-D TDEM data in the application of mapping saltwater/freshwater contact. Journal of Applied Geophysics, 34 (1): 23 - 34

Schneider W. 1978. Integral formulation for migration in two dimensions or three dimensions. Geophysics, 43 (1): 49 - 76

Song L P, Oldenburg D W, Pasion L R, et al. 2008. Adaptive focusing for source localization in EMI sensing of metallic objects: a preliminary assessment. Journal of Environmental and Engineering Geophysics, 13 (3): 131 - 145

Spies B R. 1989. Depth of investigation in electromagnetic sounding methods. Geophysics, 54 (7): 872 - 888

Spies B R, Eggers D E. 1986. The use and misuse of apparent resistivity in EM methods. Geophysics, 51 (7): 1462 - 1471

Spies B R, Parker P D. 1984. Limitation of large-loop transient electromagnetic surveys in conductive terrains. Geophysics, 49 (7): 902 - 912

Stolz E M. 2000. Electromagnetic methods applied to exploration for deep nickel sulphides in the Leinster area. Western Australia: Exploration Geophysics, 31 (2): 222 - 228

Tae J, Jung H S, Hee J K, et al. 2002. Electromagnetic travel time tomograph using approbobility wave-field transform. Geophysics, 67 (3): 67 - 69

Uher J, Mennitto J, McLaren D. 1999. Design concepts for the Radarsat - 2 SAR antenna. IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, 3: 1532 - 1535

Weidelt P. 1972. The inverse problem of geomagnetic induction. J Geophys, 38, 257 - 298

Weydahl D J, Bretar F, Bjerke P. 2004. Comparison of RADARSAT - 1 and IKONOS satellite images for urban features detection. Journal Information Fusion, 6: 243 - 249

Xue G Q, Bai C Y, Li X. 2012. Extracting virtual reflection wave from TEM data based on regularizing method. Pure and Applied Geophysics, 69 (7): 1269 - 1282

Xue G Q, Yan Y J, Li X. 2007. Pseudo-seismic wavelet transformation of transient electromagnetic response in engineering geology exploration. Geophysical Research Letters, 34: L16405

Xue G Q, Yan Y J, Li X. 2011. Control of wave-form dispersion effect and applications in TEM imaging technique for identifying underground objects. Journal of Geophysics and Engineering, 8 (03): 195 - 201

Xue G Q, Yan Y J, Li X, et al. 2007. Transient electromagnetic S - inversion in tunnel prediction. Geophysical Research Letters, 34: L18403

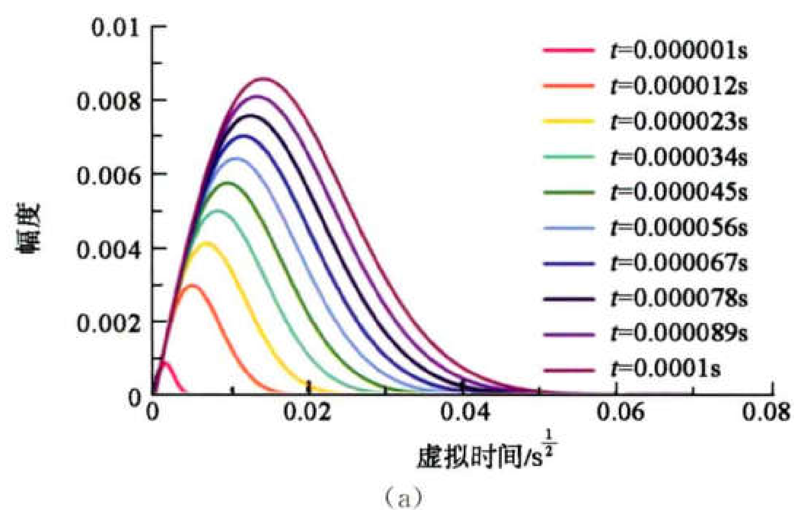
Zhdanov M S, Booker J R. 1993. Underground imaging by electromagnetic migration. In: 63rd Ann Internat Mtg Expl. Geophys, Expanded Abstracts: 355 - 357

Zhdanov M S, Li W D. 1997. 2D finite-difference time domain electromagnetic migration. In: 67th SEG EM2, 1: 370 - 373

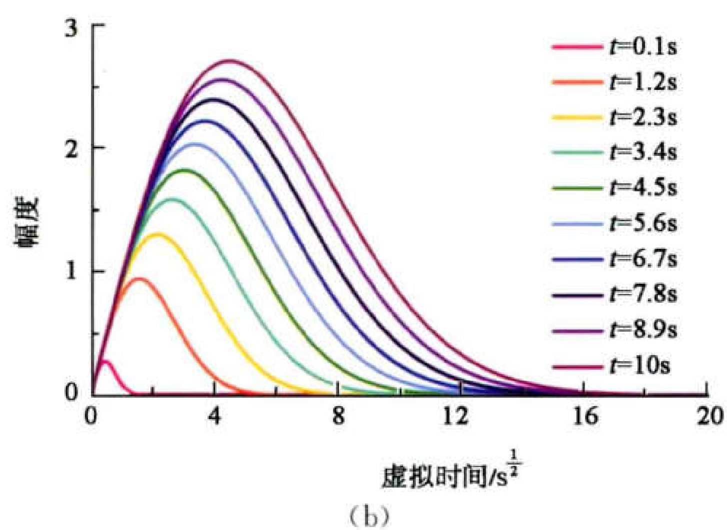
Zhdanov M S, Portniaguine O. 1997. Time-domain electromagnetic migration in the solution of inverse problems. Geophys J Int, 131: 293 - 309

Zhdanov M S, Matusevich V Y, Frenkel M A. 1988. Seismic and electromagnetic migration. Nauka (in Russian)

# 彩　图




(a)




(b)

图 2.1　不同时间道核函数的展布图

(a) $t$=1～100μs 核函数展布图；(b) $t$=0.1～10s 核函数展布图

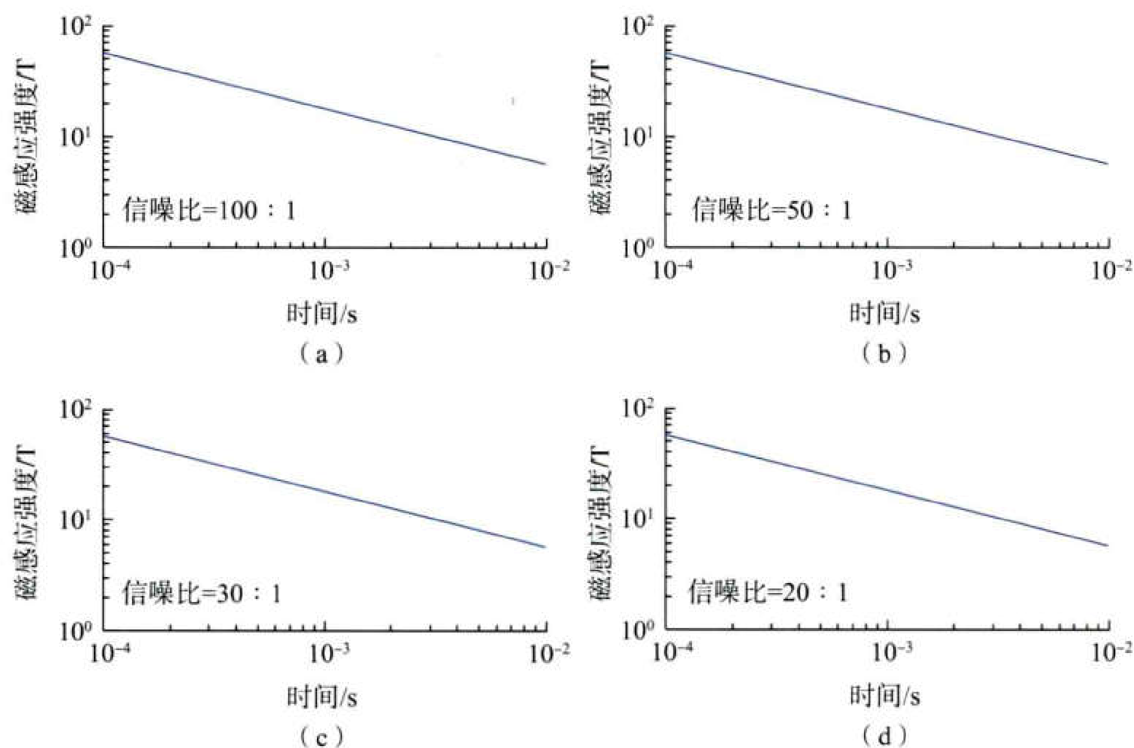



图 3.19　$U(\tau)=1$ 的含噪时间域响应

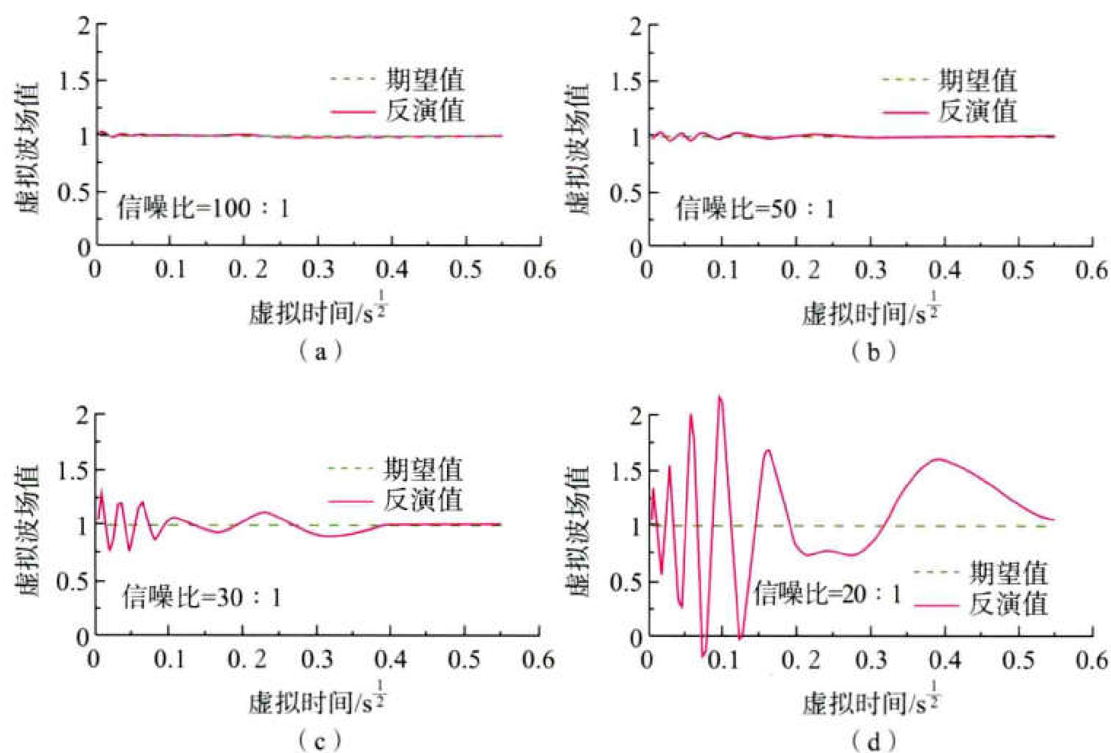



图 3.20　$U(\tau)=1$ 的含噪时间域响应反变换

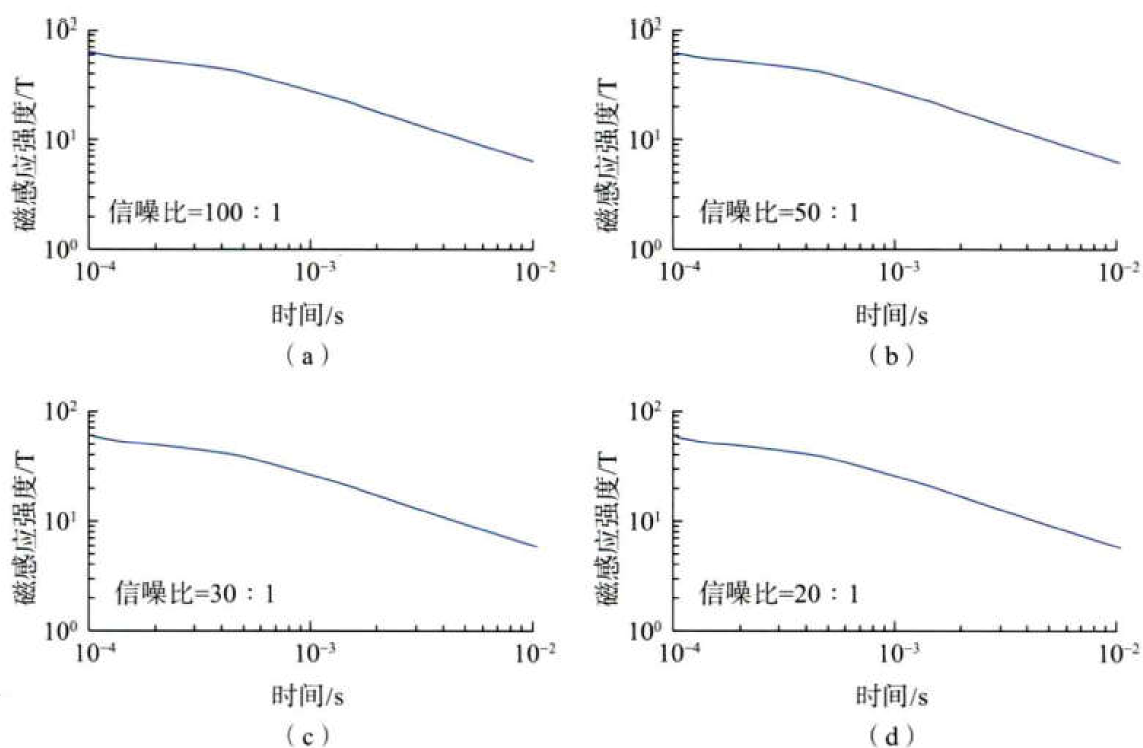


图 3.21　正向单脉冲的含噪时间域响应

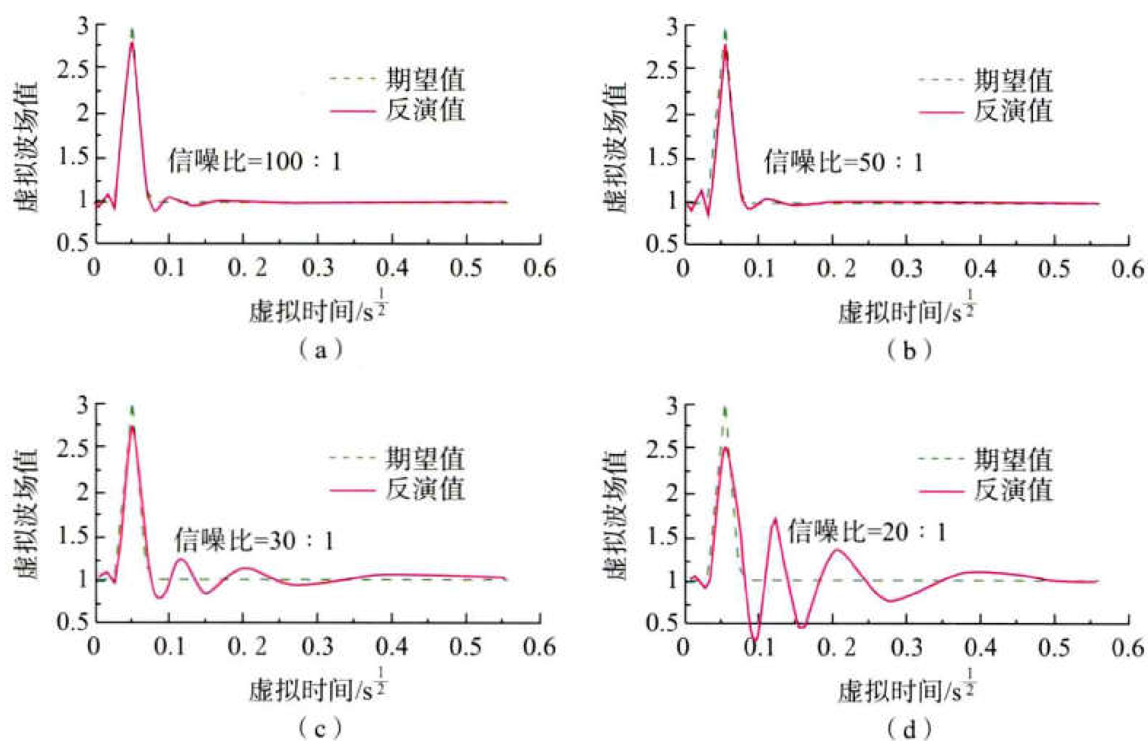


图 3.22　正向单脉冲含噪时间域响应反变换

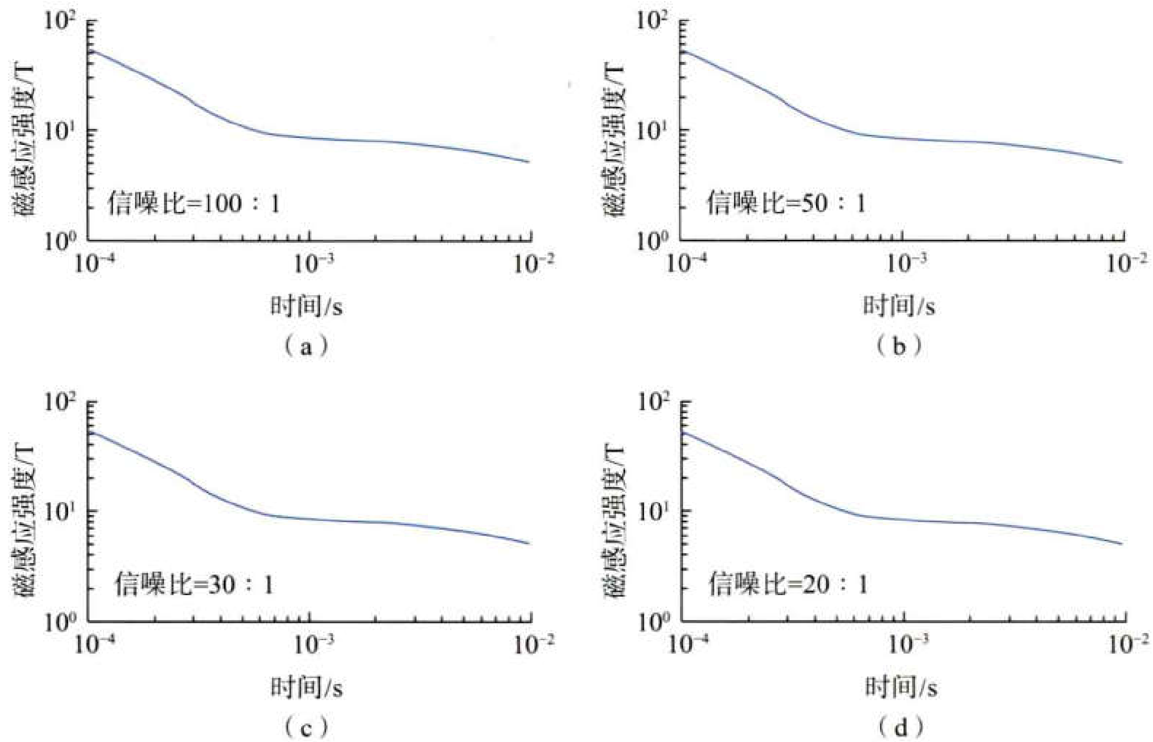



图 3.23 负向单脉冲的含噪时间域响应

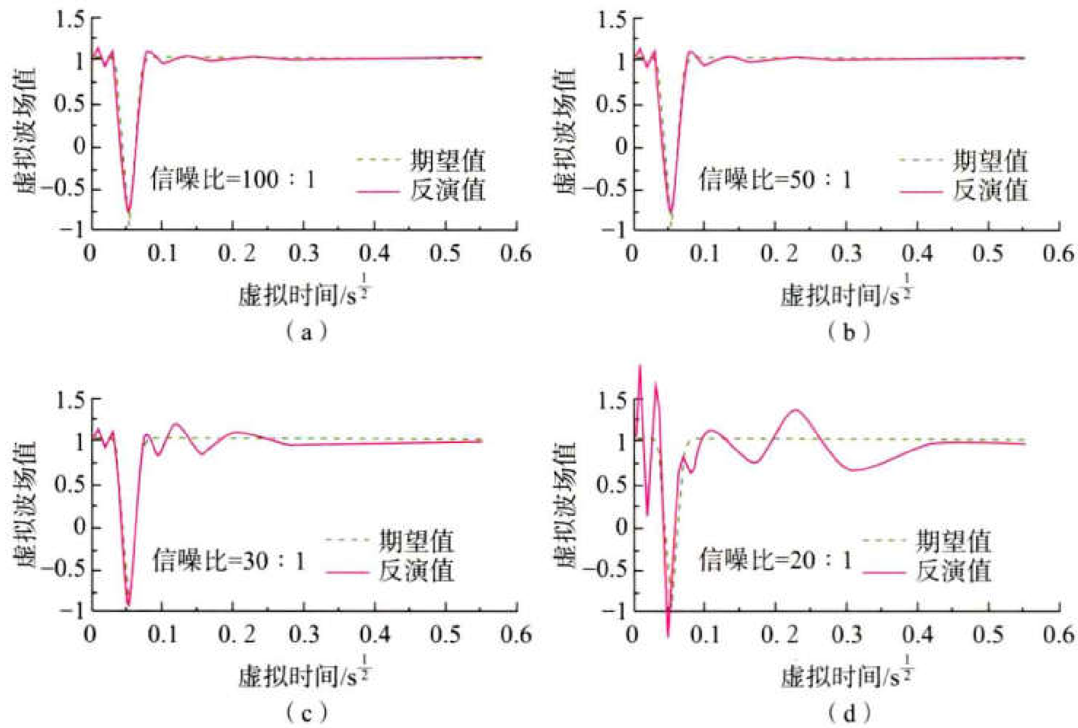



图 3.24 负向单脉冲含噪时间域响应反变换

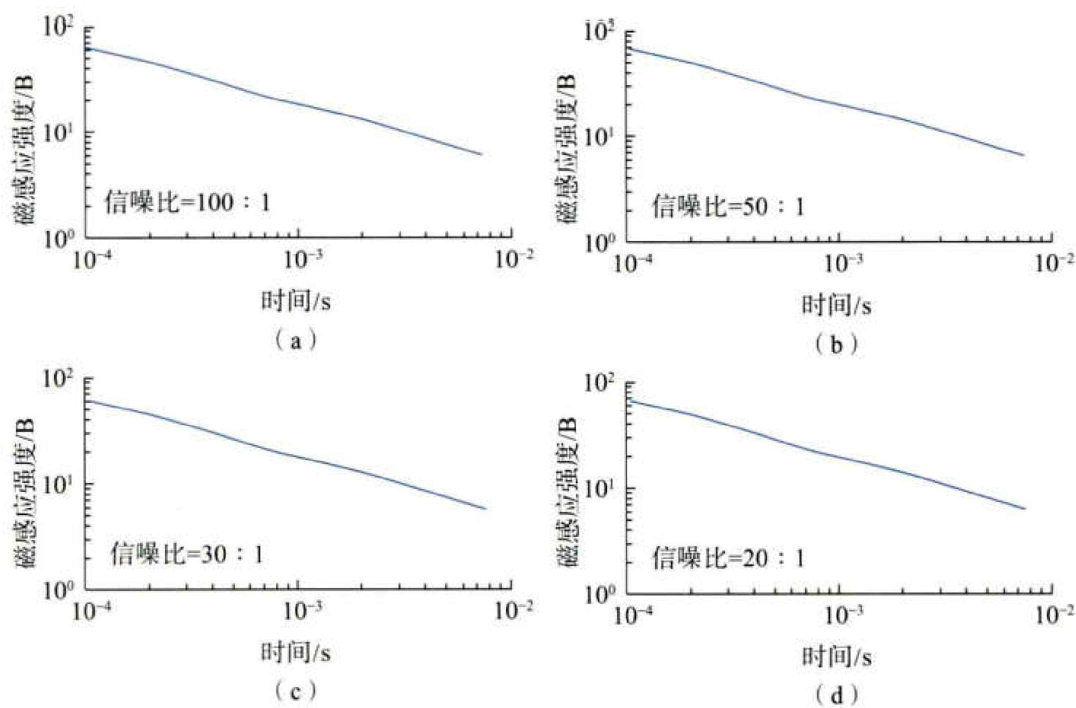



图 3.25 正向双脉冲的含噪时间域响应

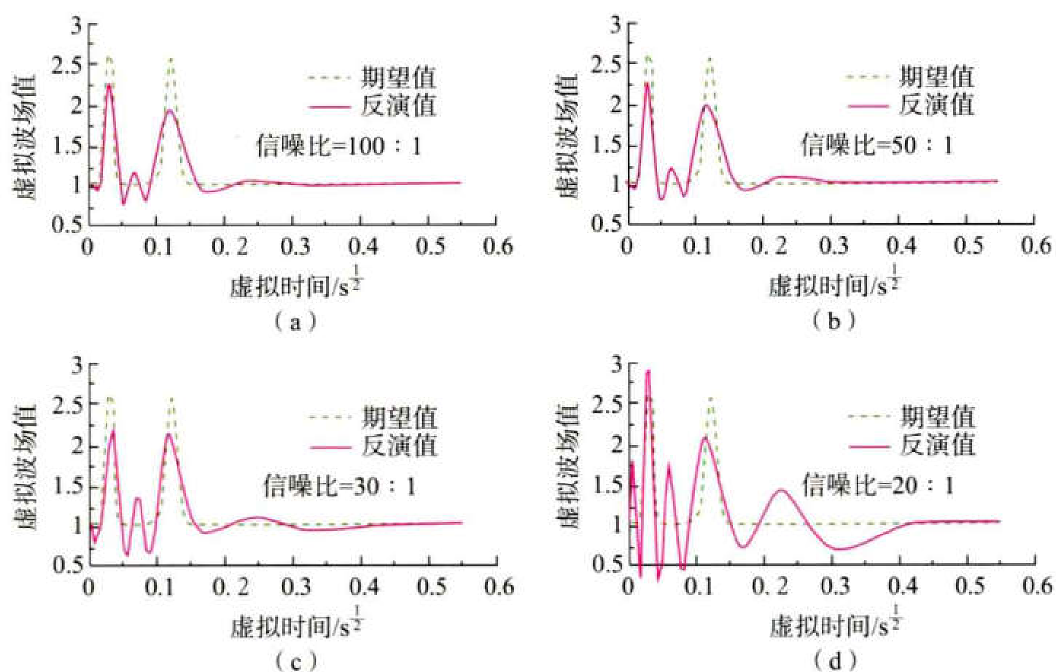



图 3.26 正向双脉冲含噪时间域响应反变换

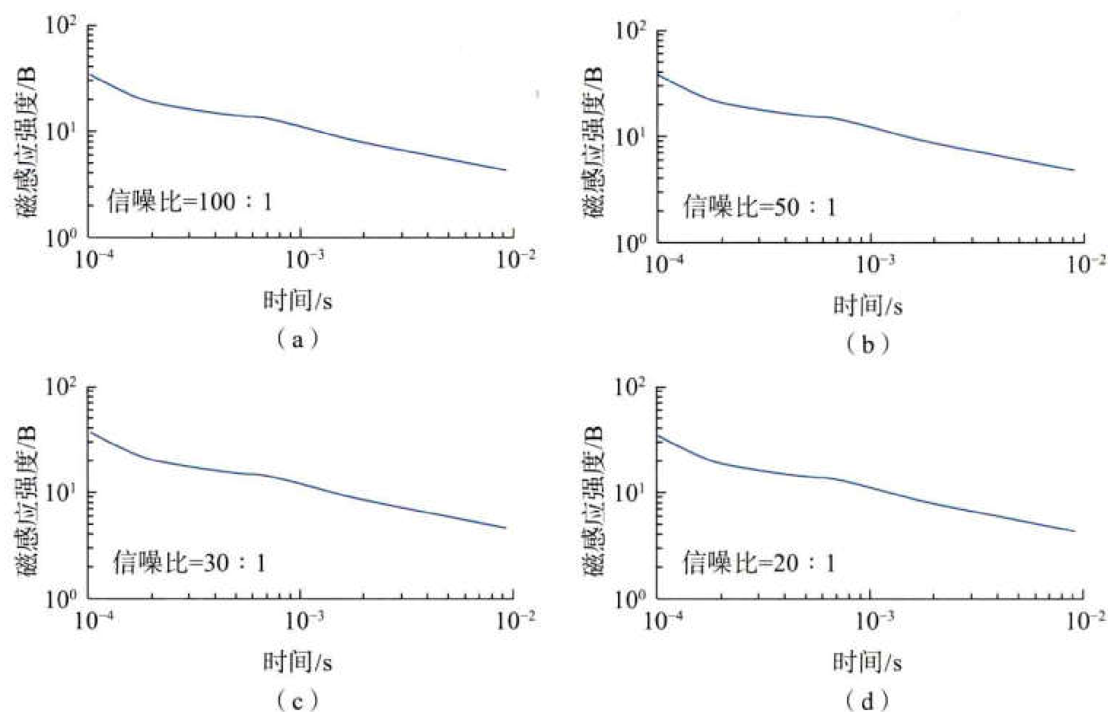



图 3.27　负向双脉冲的含噪时间域响应

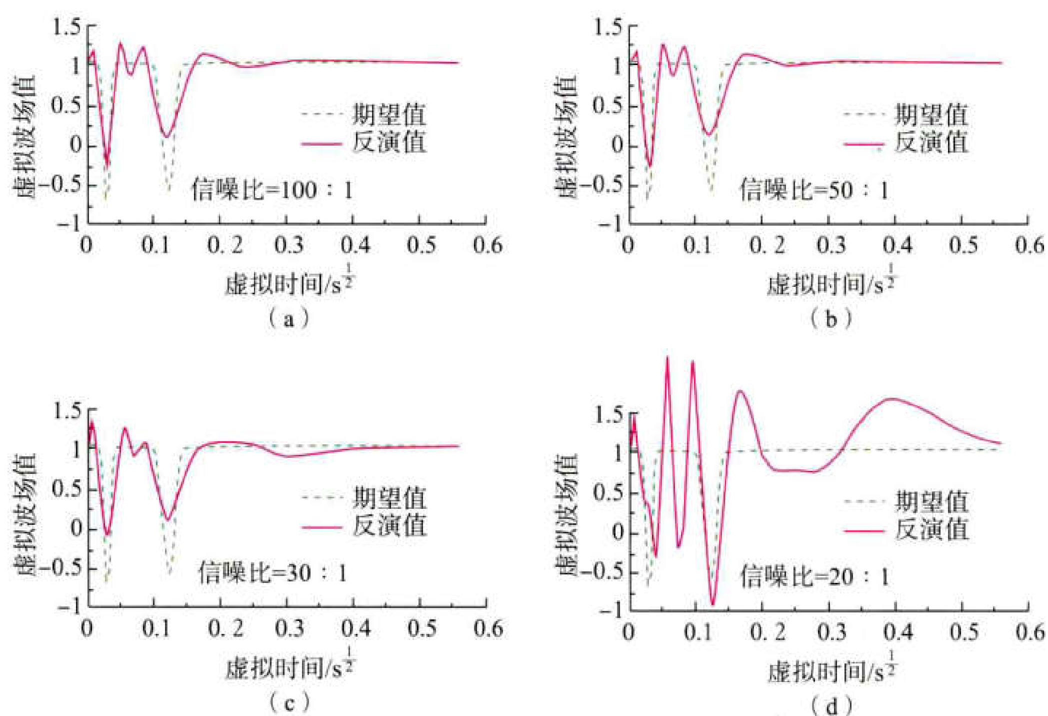



图 3.28　负向双脉冲含噪时间域响应反变换

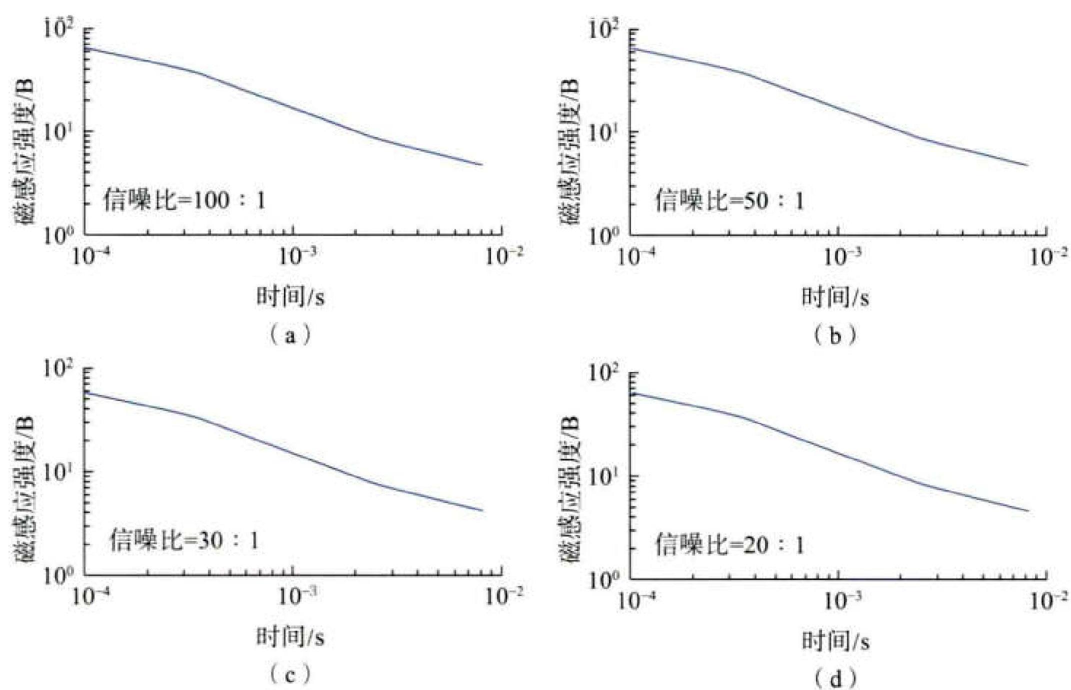



图 3.29 正负向双脉冲的含噪时间域响应

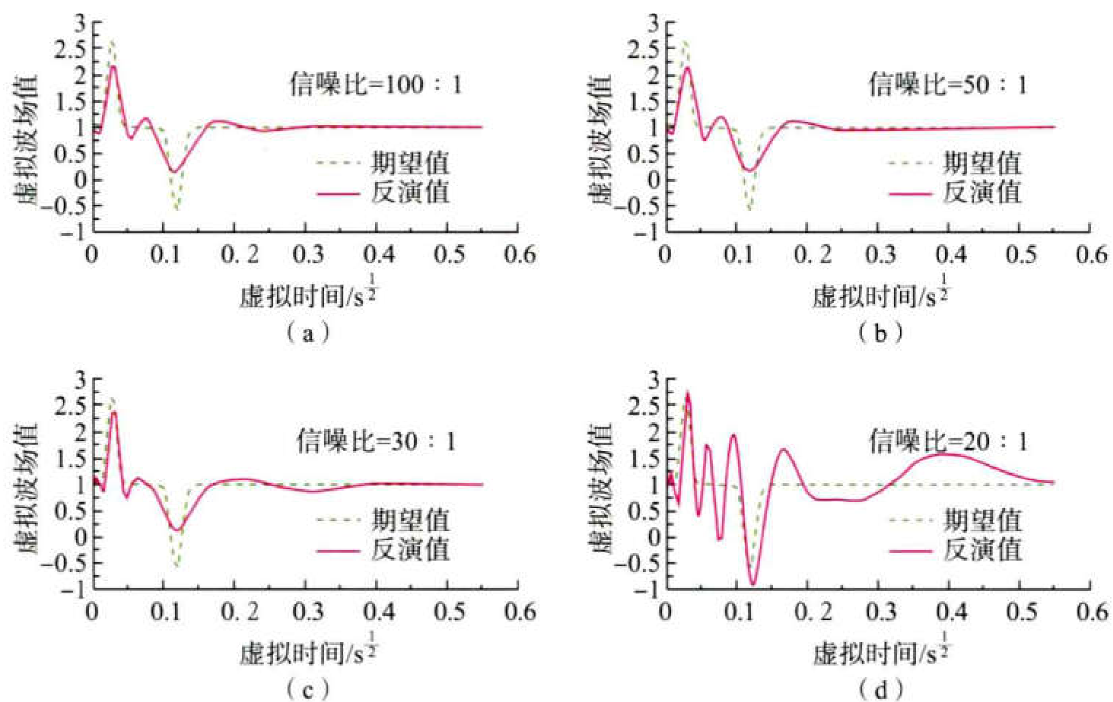



图 3.30 正负向双脉冲含噪时间域响应反变换

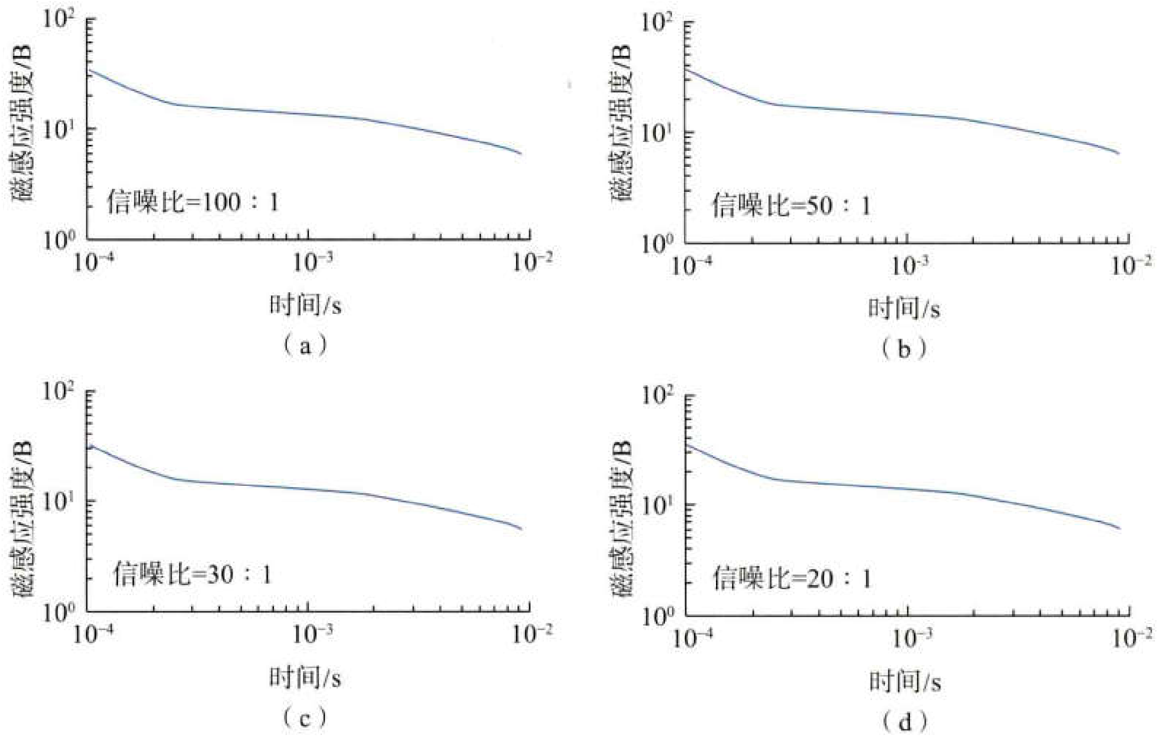



图 3.31　负正向双脉冲的含噪时间域响应

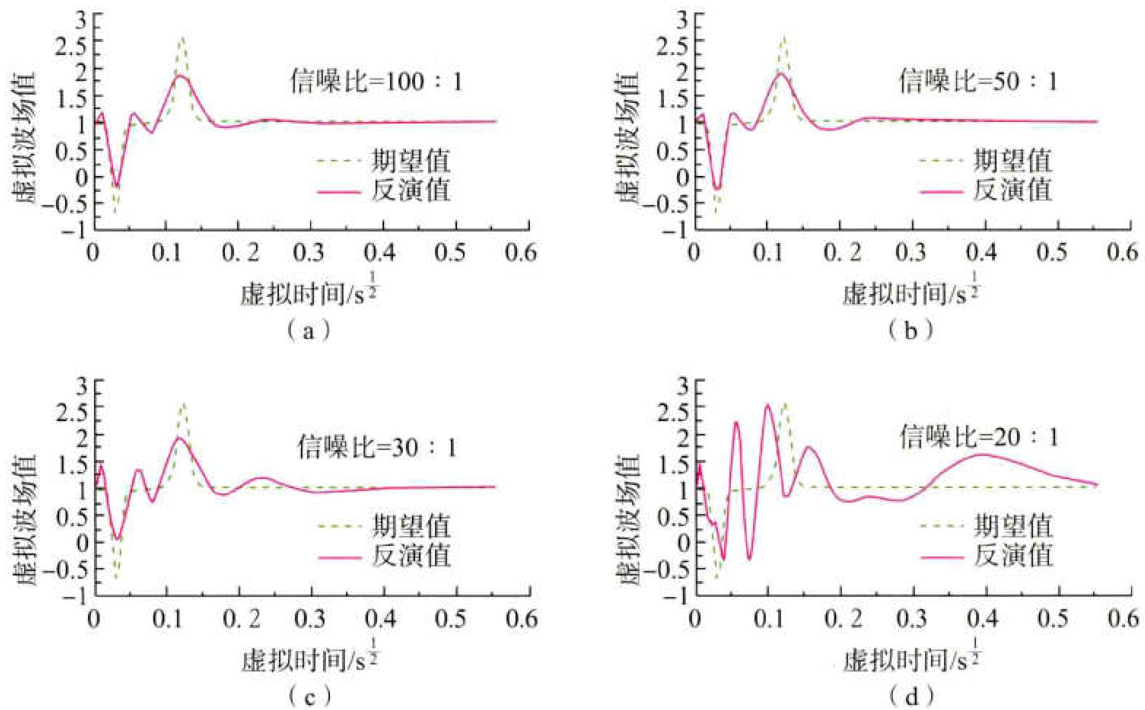



图 3.32　负正向双脉冲含噪时间域响应反变换

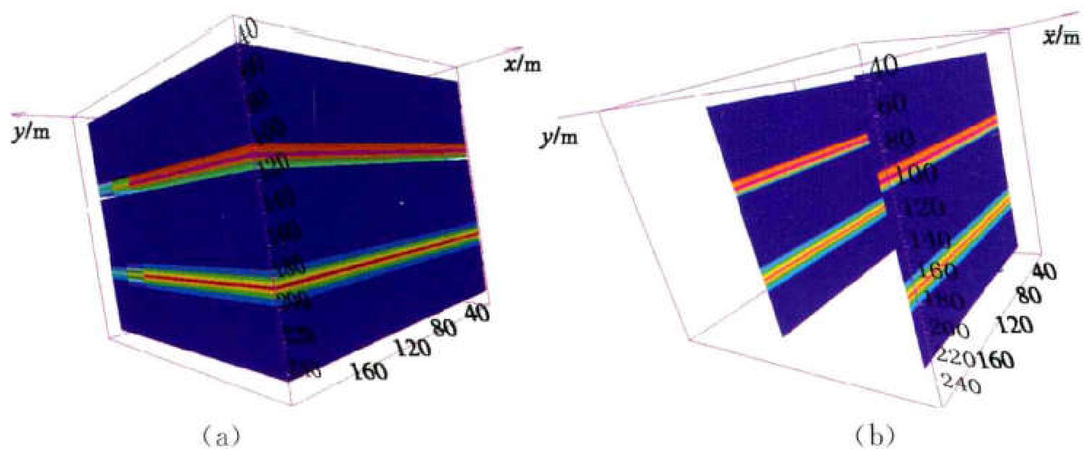
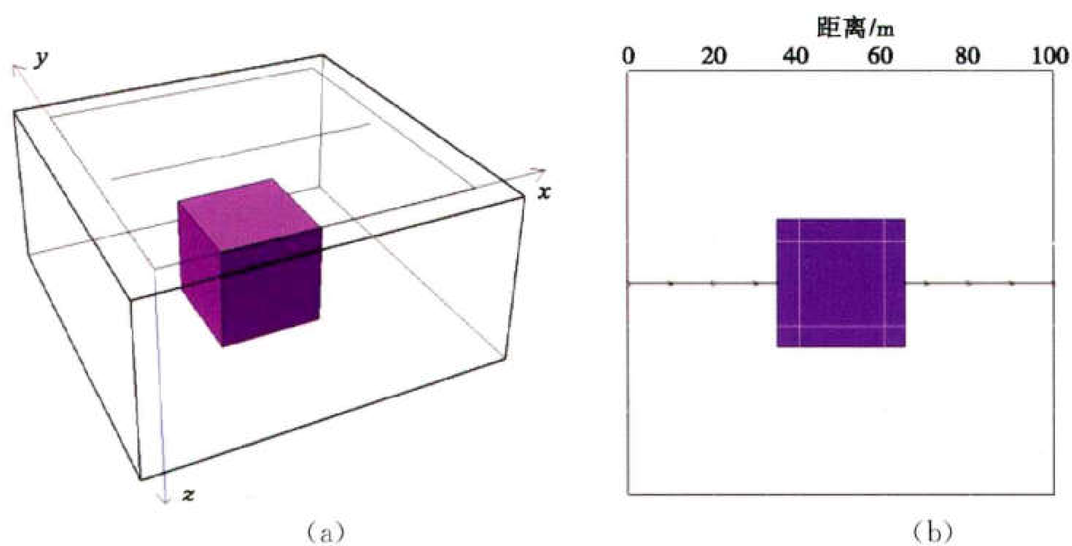
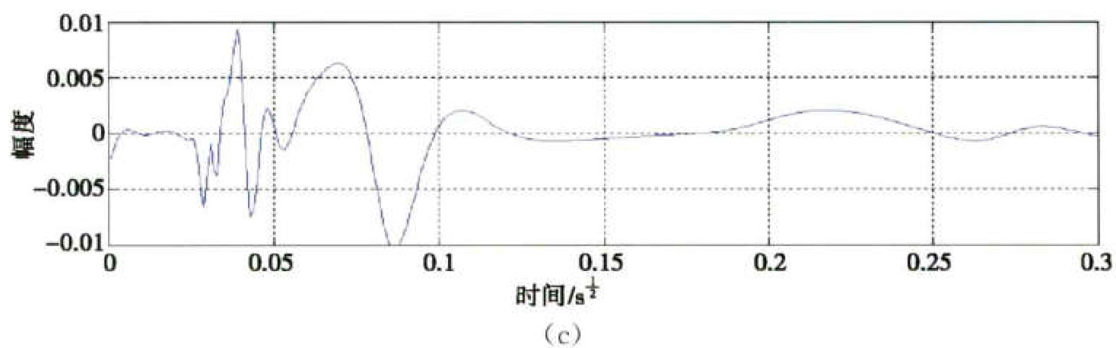


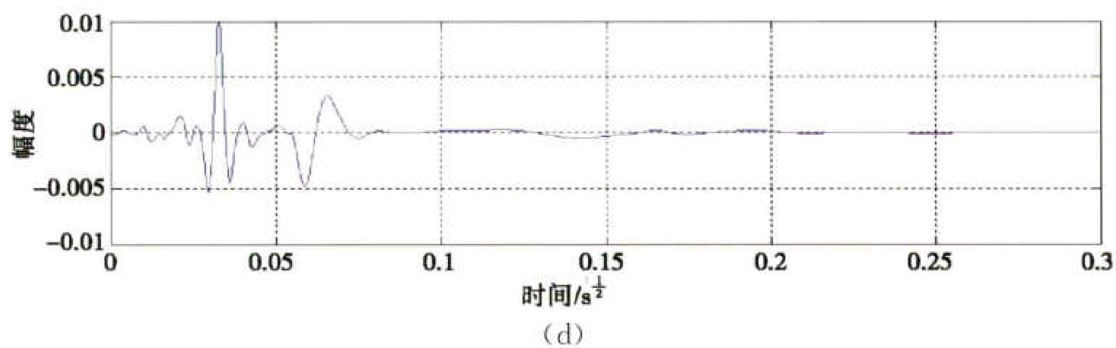

图 4.5　H 型模型拟地震成像图

(a) H 模型成像图；(b) H 模型成像切片图

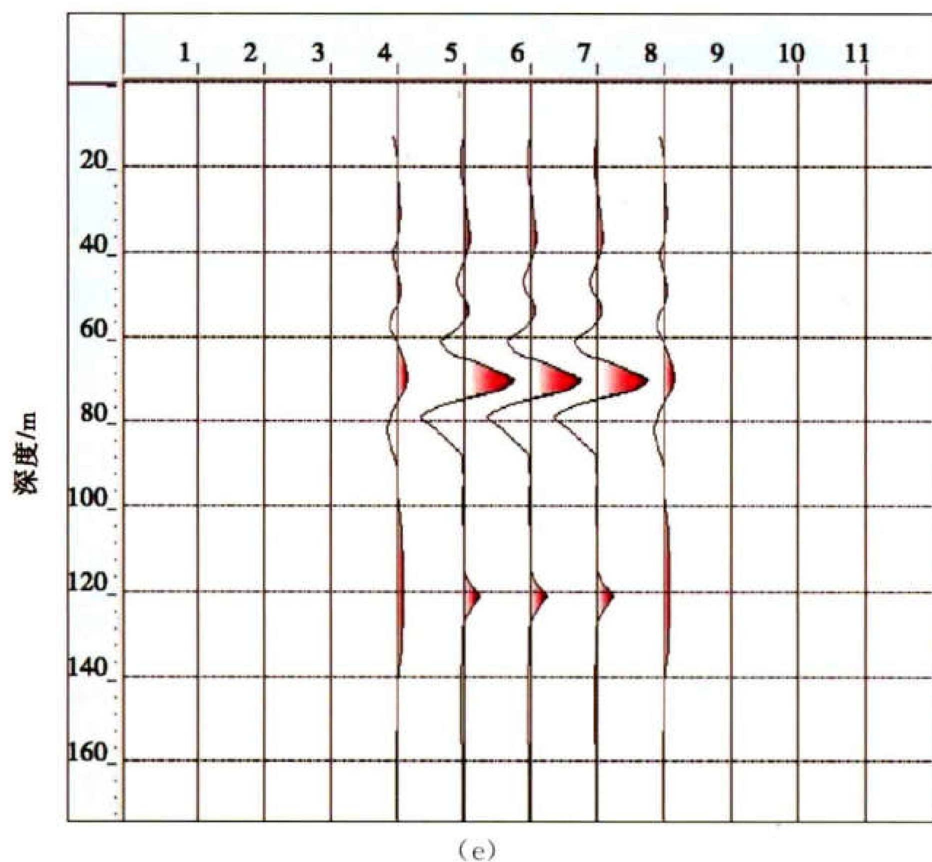



(c)



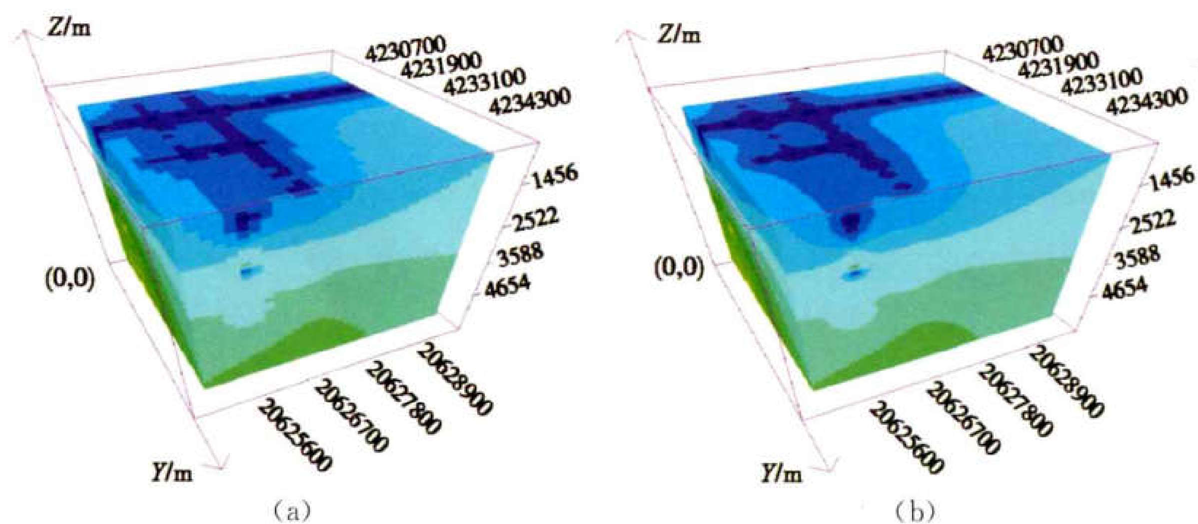

(d)




(e)

图 4.6　反褶积计算前后三维模型子波对比

(a) 三维地电模型；(b) 计算场点平面分布；(c) 压缩前子波波形；
(d) 压缩后子波波形；(e) 拟地震成像剖面




(a)　　(b)

图 6.4　全局距离加权插值的不同网格化程度的对比

(a) X，Z 方向网格 30 的插值结果；(b) X，Z 方向网格 100 的插值结果

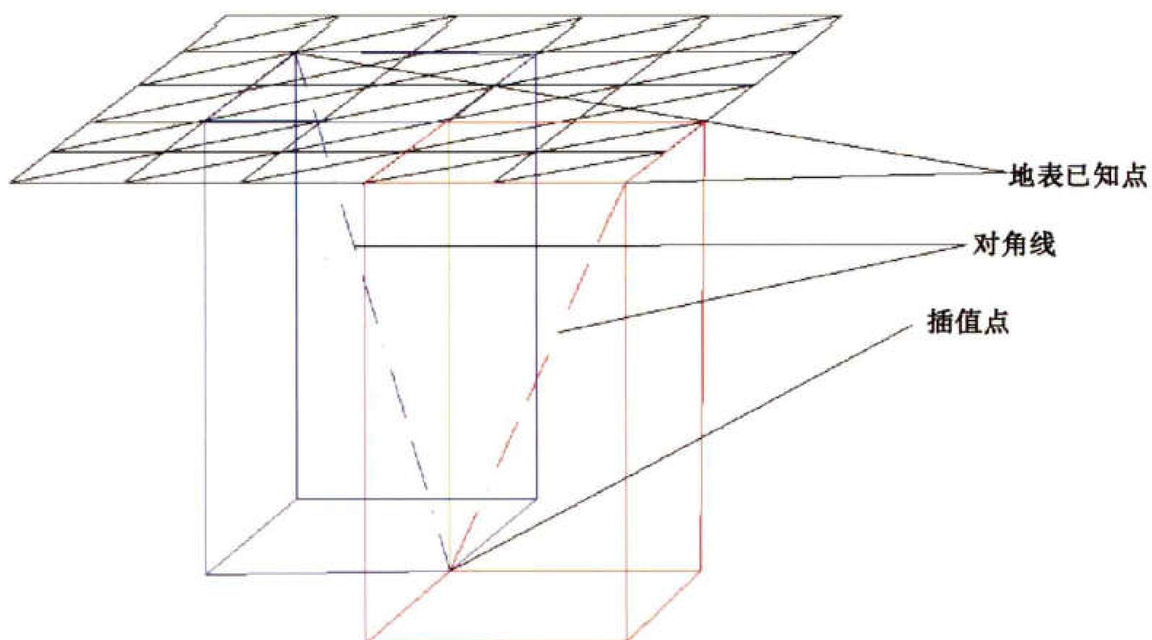
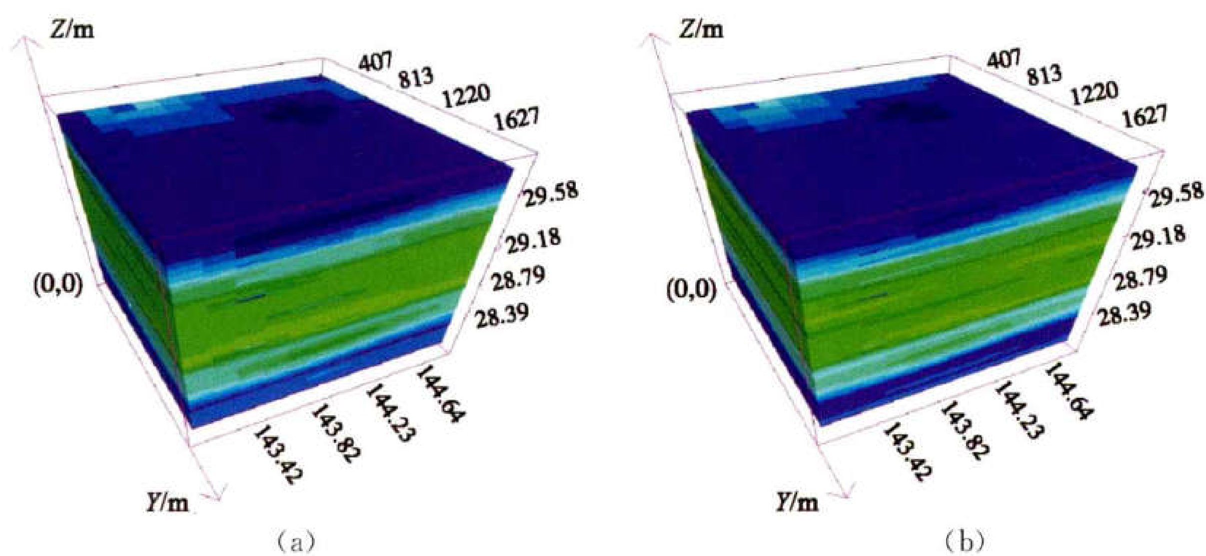


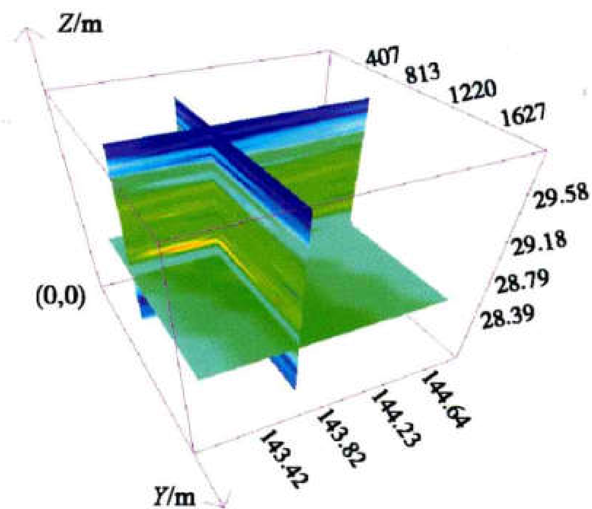

图 6.7　近点线性插值计算原理示意图

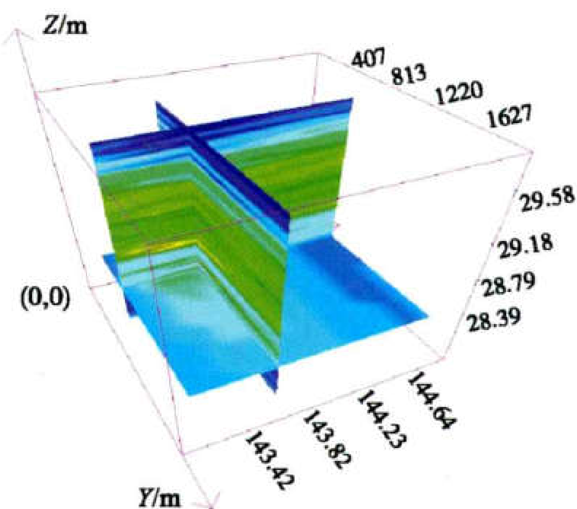


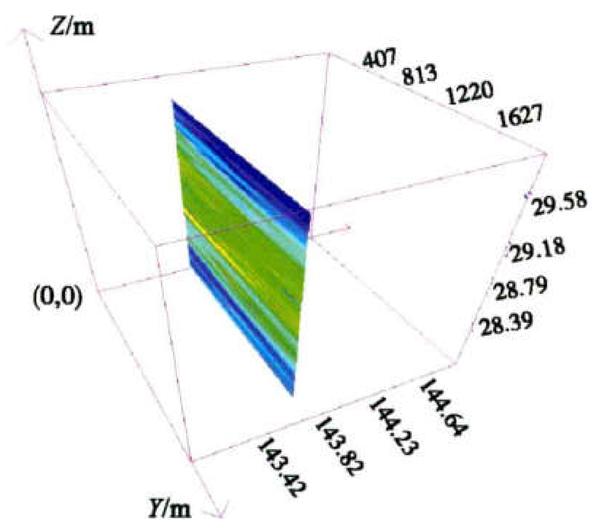

(a)　　　　　(b)

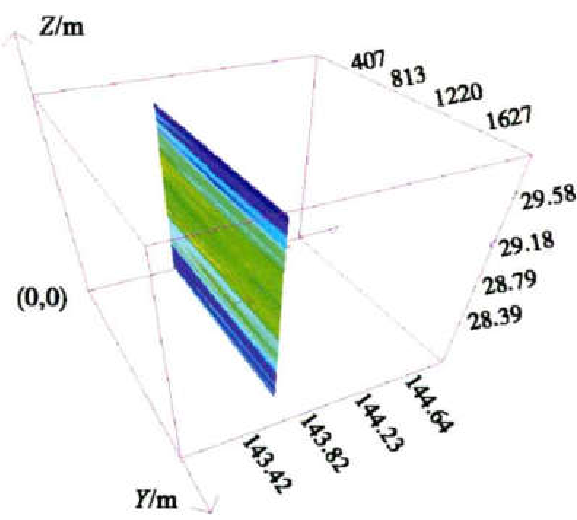
图 6.11　近点线性插值结果对比图

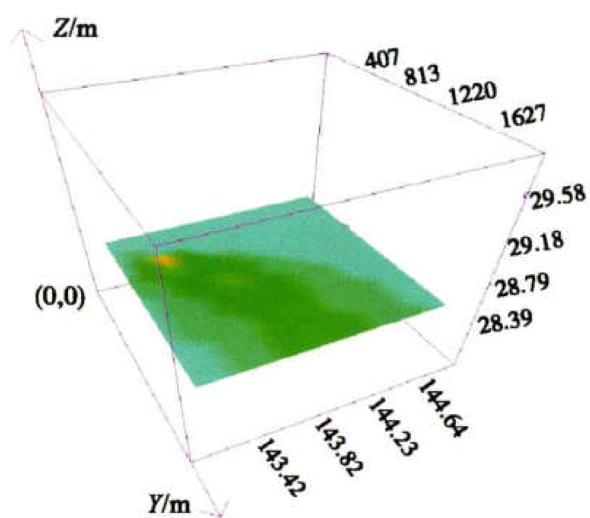
(a) 原始数据；(b) 插值数据

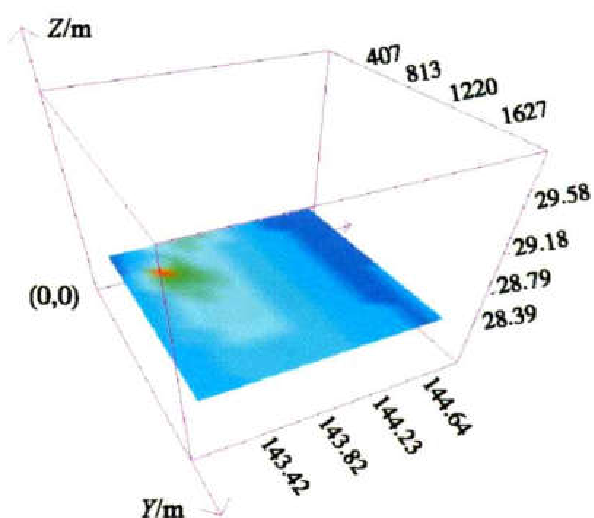

Z/m
407
813
1220
1627
29.58
29.18
28.79
28.39
(0,0)
143.42
143.82
144.23
144.64
Y/m


Z/m
407
813
1220
1627
29.58
29.18
28.79
28.39
(0,0)
143.42
143.82
144.23
144.64
Y/m


Z/m
407
813
1220
1627
29.58
29.18
28.79
28.39
(0,0)
143.42
143.82
144.23
144.64
Y/m


Z/m
407
813
1220
1627
29.58
29.18
28.79
28.39
(0,0)
143.42
143.82
144.23
144.64
Y/m


Z/m
407
813
1220
1627
29.58
29.18
28.79
28.39
(0,0)
143.42
143.82
144.23
144.64
Y/m


Z/m
407
813
1220
1627
29.58
29.18
28.79
28.39
(0,0)
143.42
143.82
144.23
144.64
Y/m

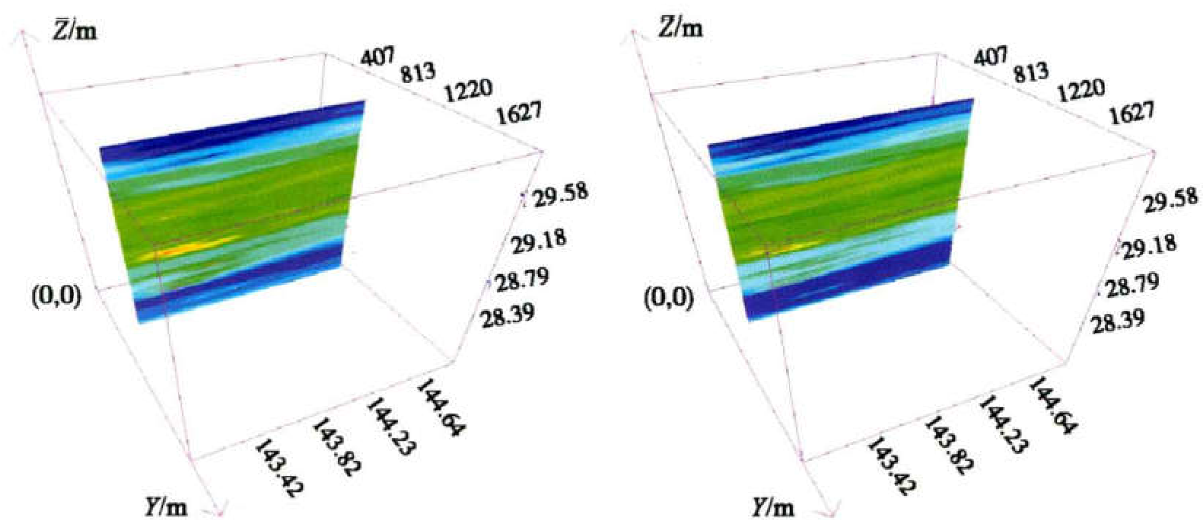



图 6.12　近点线性插值结果切片对比图

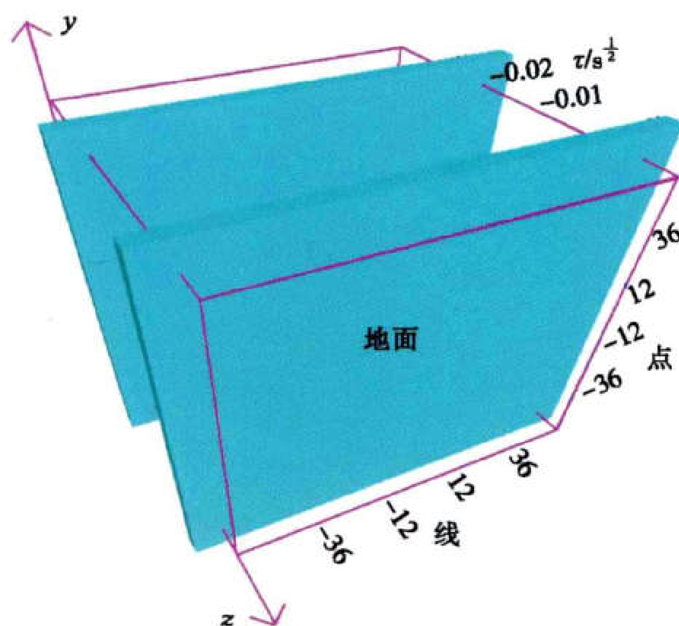



图 7.2　A 型地电模型波场变换结果

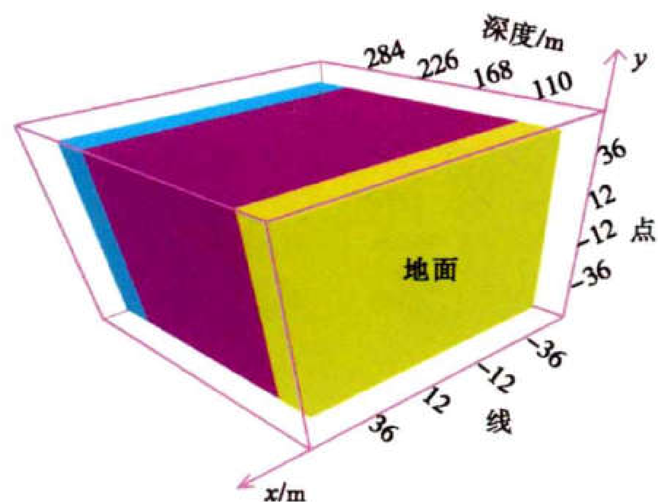



图 7.3　A 型地电模型波场速度分析结果

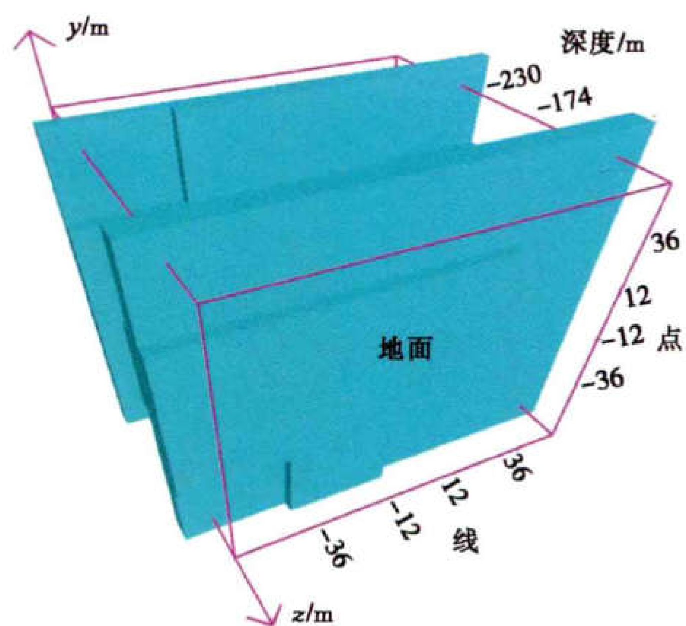
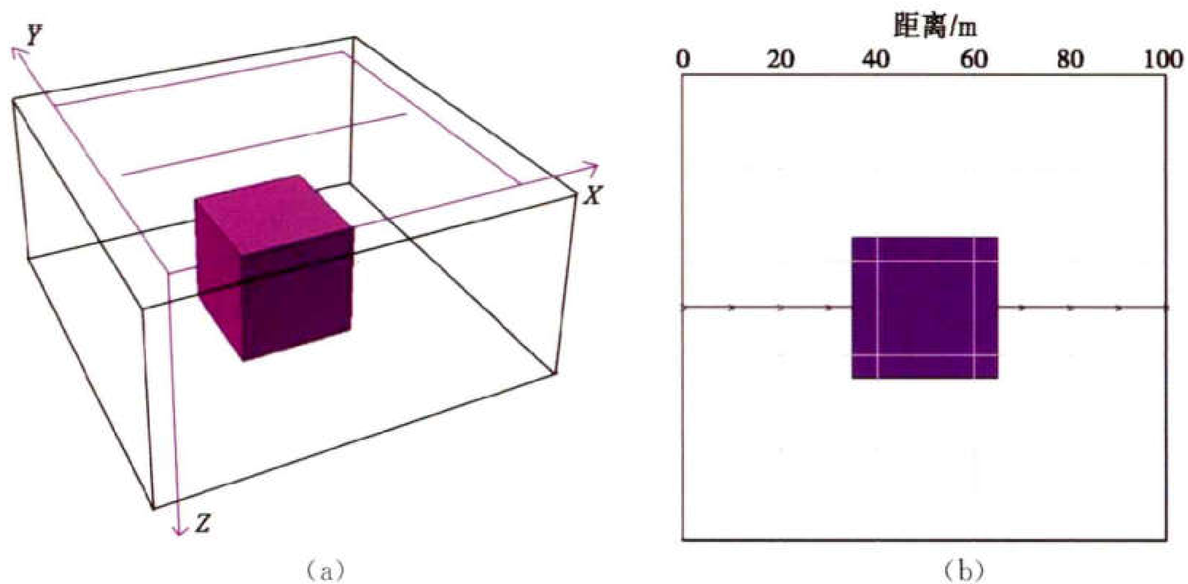



图 7.4　A 型地电模型波场延拓成像结果




(a)　　(b)

图 7.5　模型三维示意图

(a) 三维模型立体图；(b) 主剖面平面图

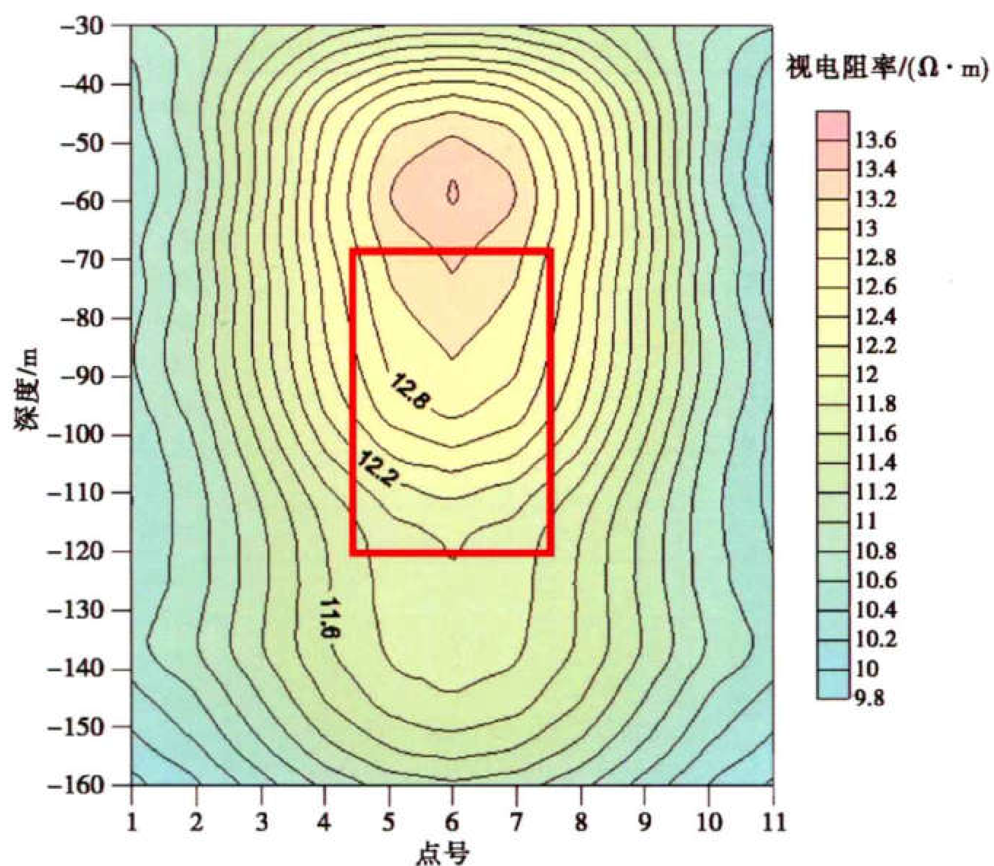
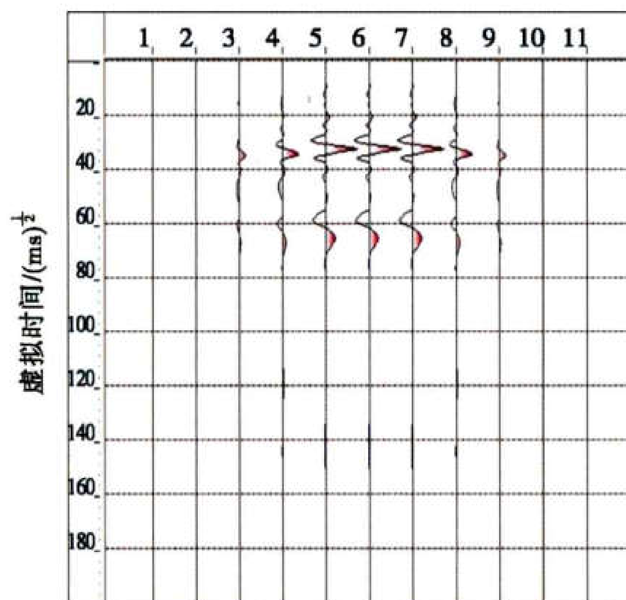
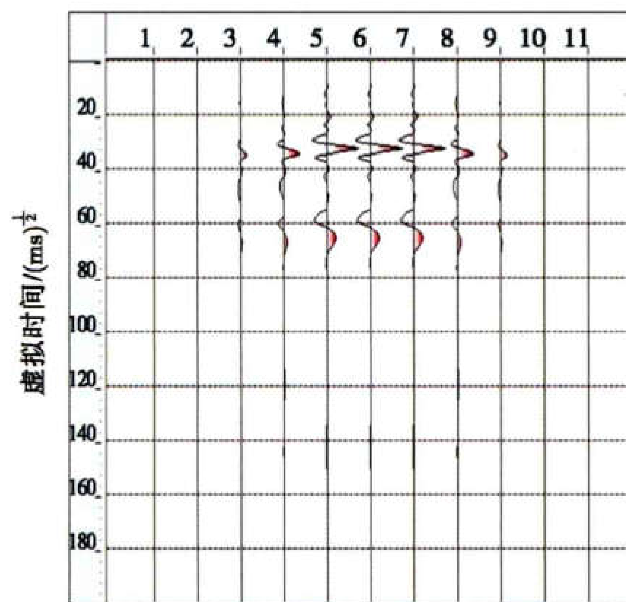



图 7.6　视电阻率剖面




(a)




(b)

图 7.7　模型计算结果

(a) 合成孔径成像前波场变换结果；

(b) 合成孔径后波场变换结果

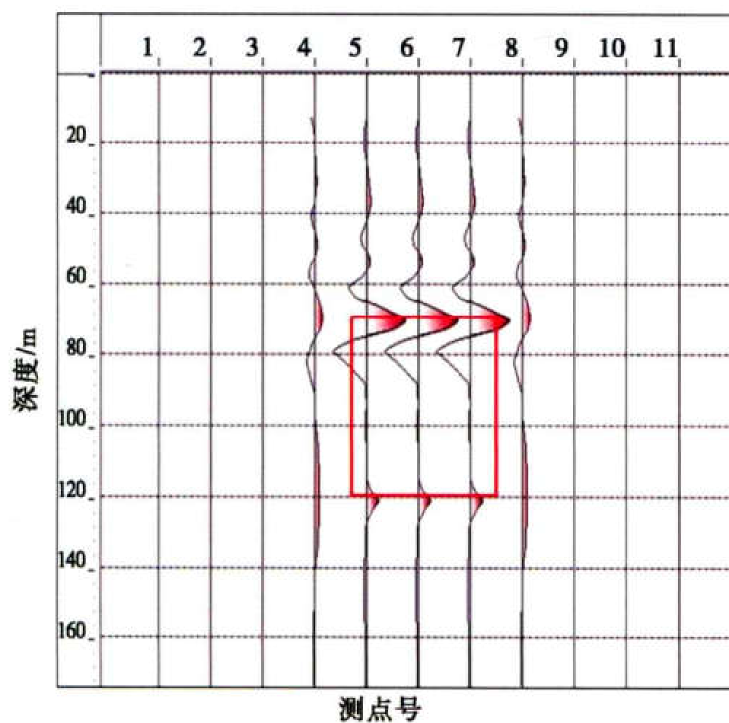



图 7.8　主剖面偏移成像断面图

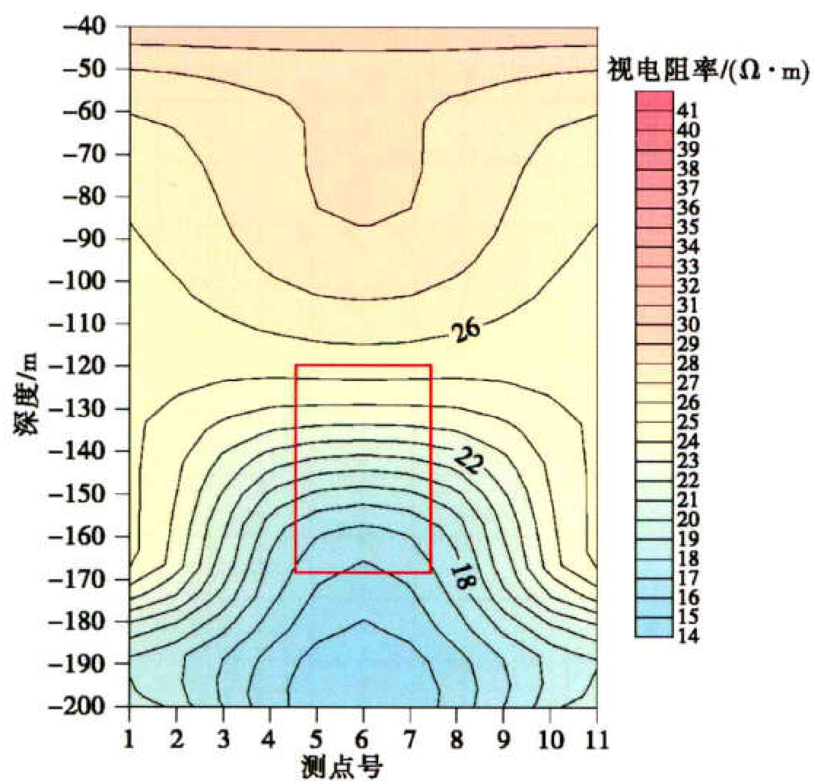
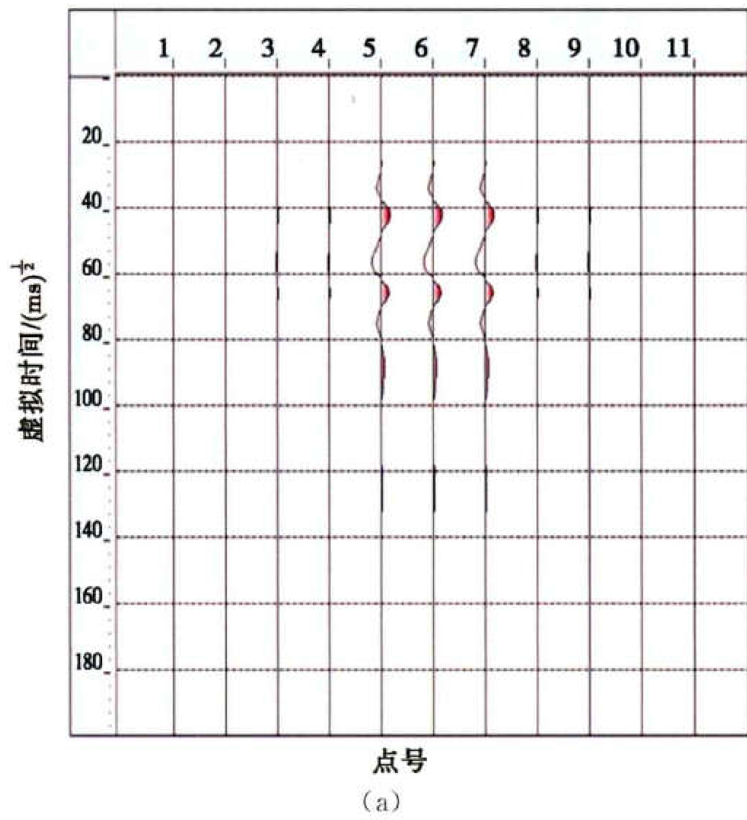
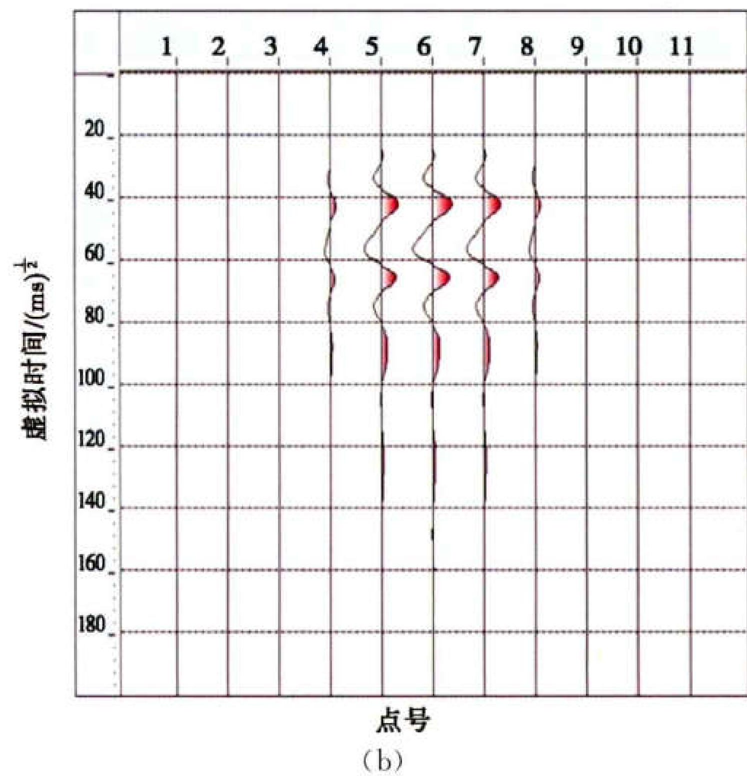



图 7.9　视电阻率剖面




(a)




(b)

图 7.10　模型计算结果

(a) 合成孔径成像前波场变换结果；(b) 合成孔径后波场变换结果

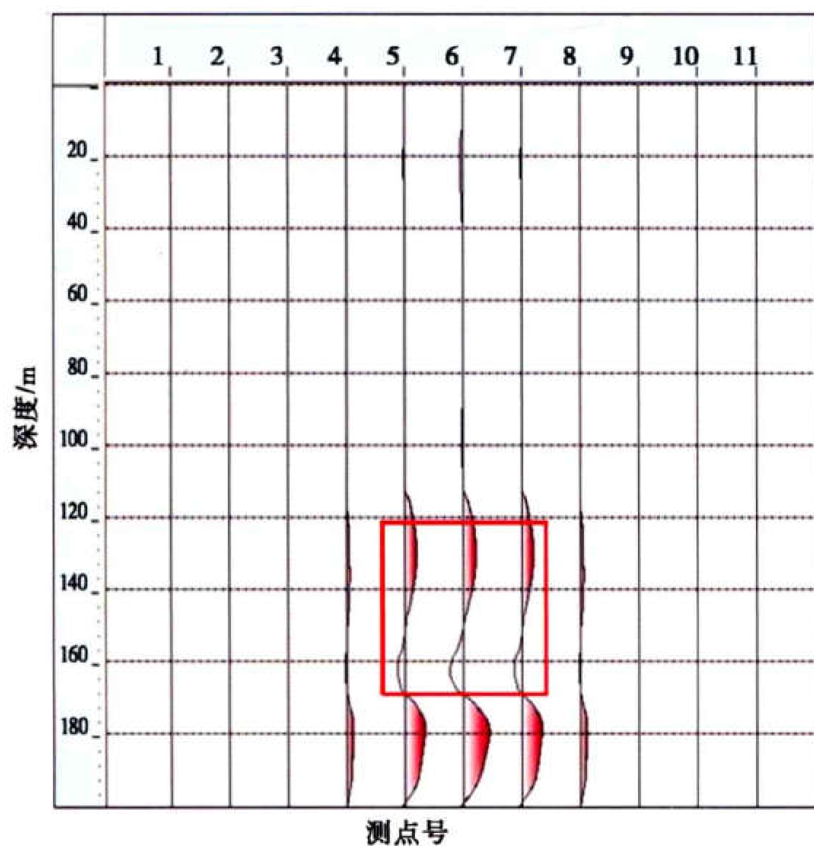



图 7.11　主剖面偏移成像断面图

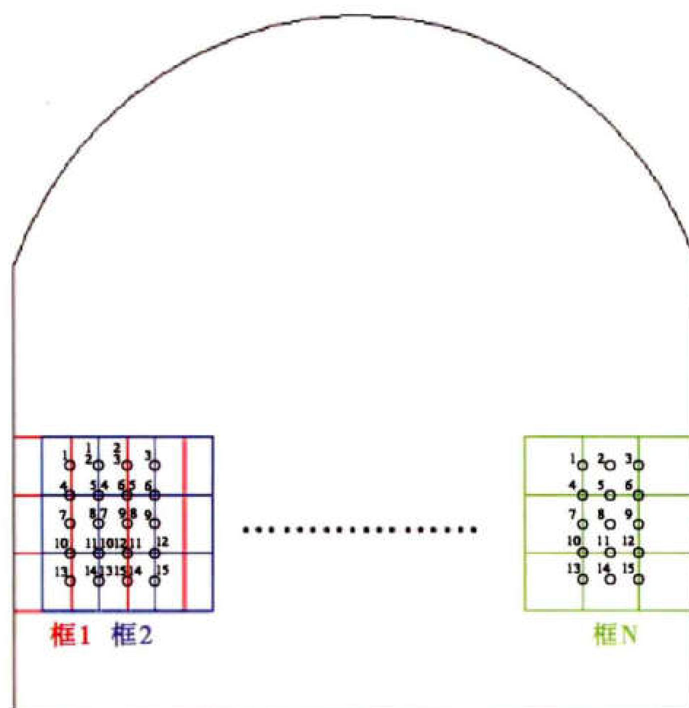



图 7.12　瞬变电磁测线布置图

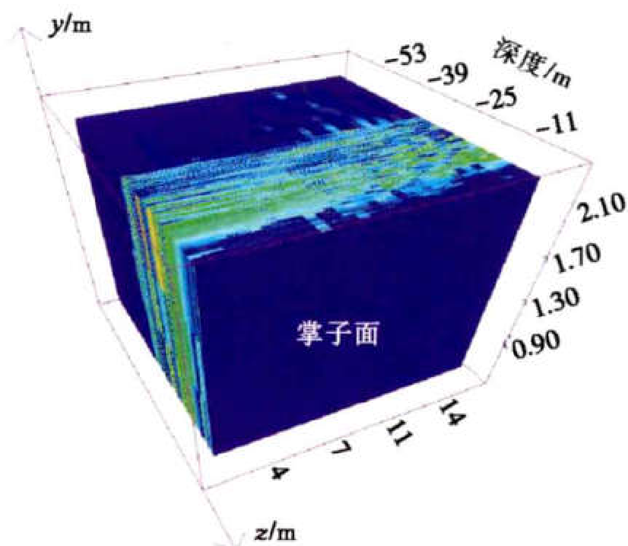



图 7.13　虚拟波场速度分析三维结果

图 7.14　实测资料虚拟波场三维切片结果

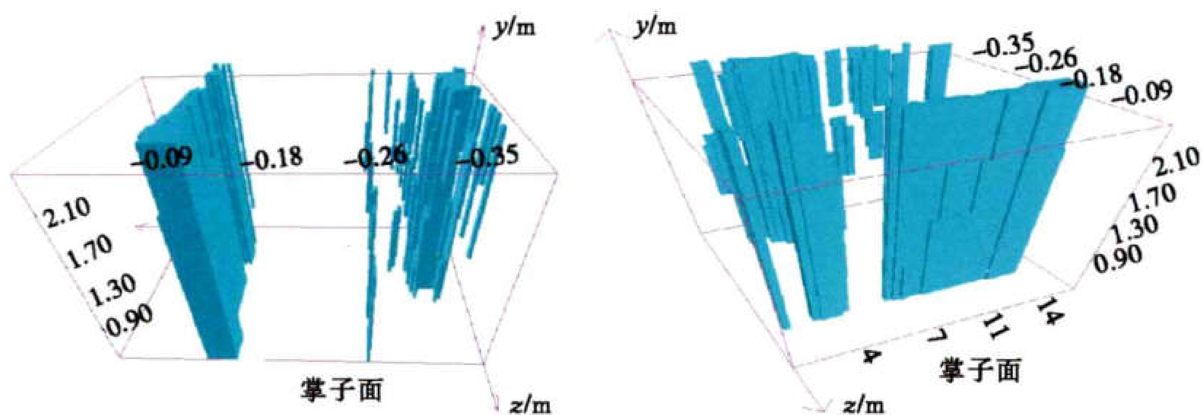



图 7.15　不同方位水体不良地质体波场变换三维结果

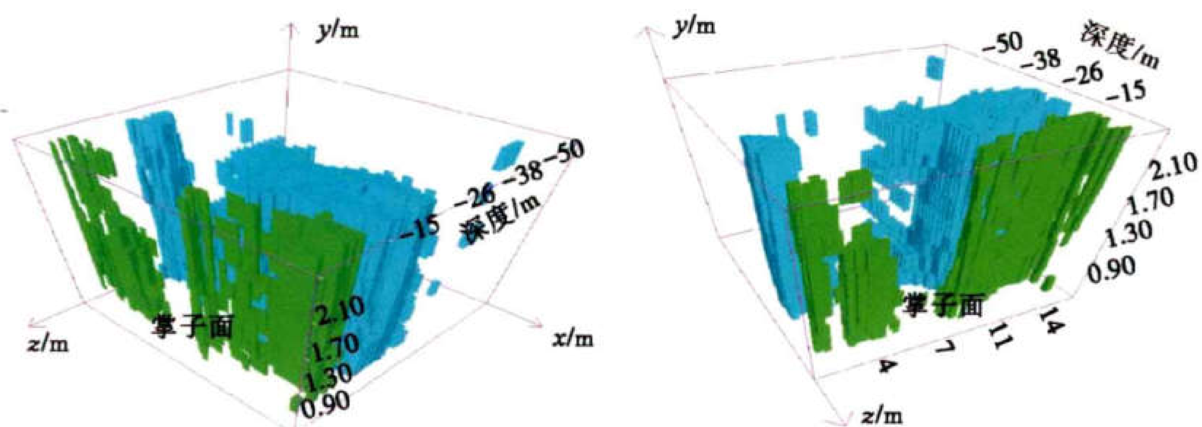
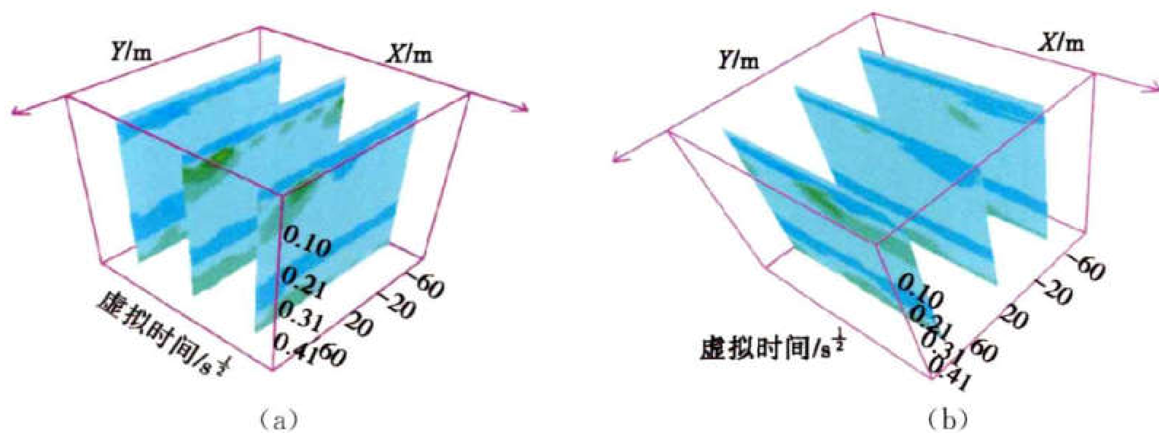



图 7.16　水体不良地质体延拓成像三维结果




(a)　　　　(b)

图 7.17　波场三维成像效果图

(a) $X$ 方向切片；(b) $Y$ 方向切片

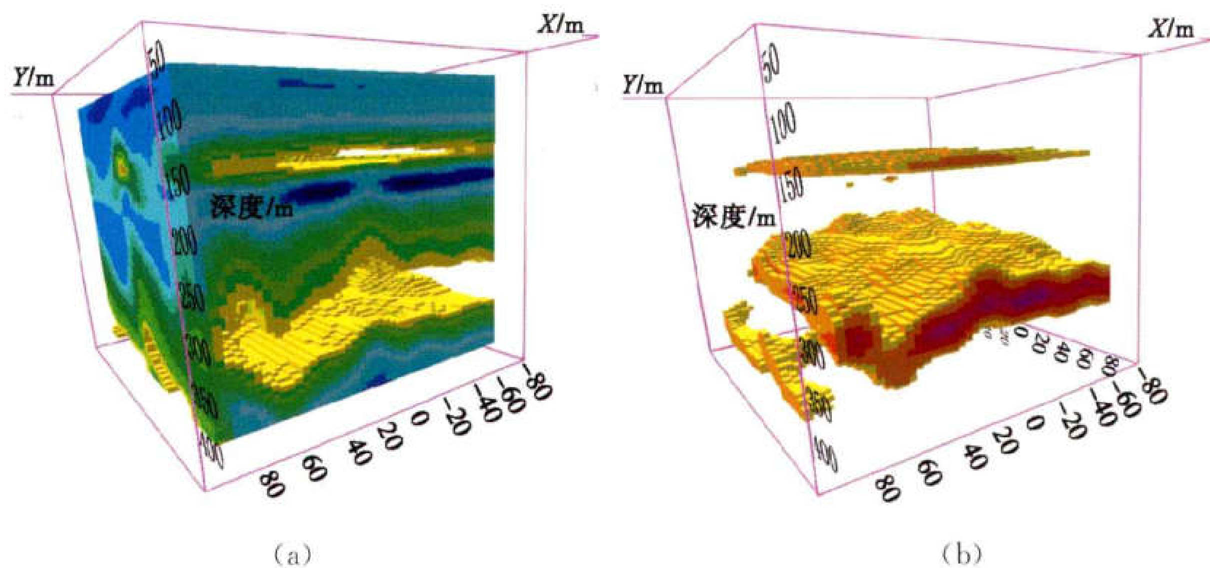
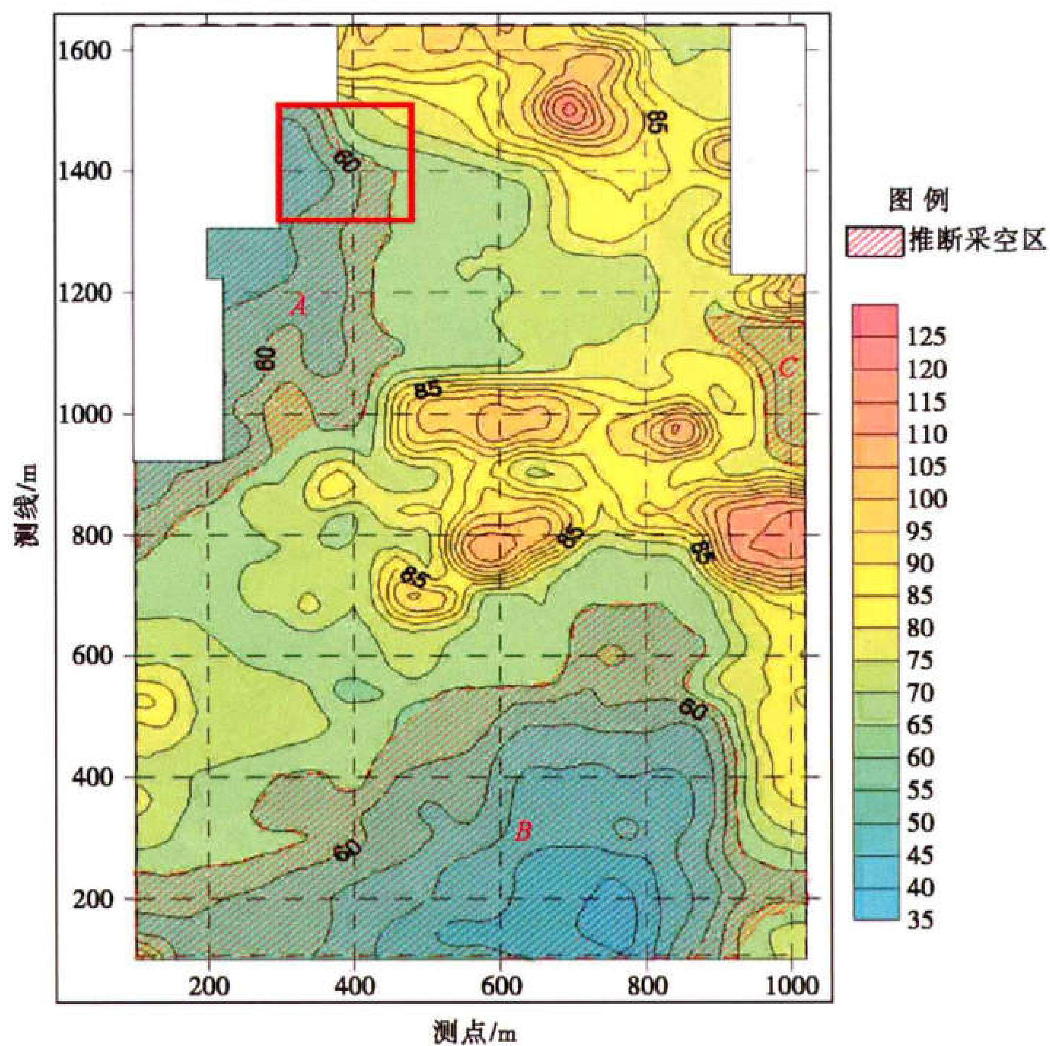
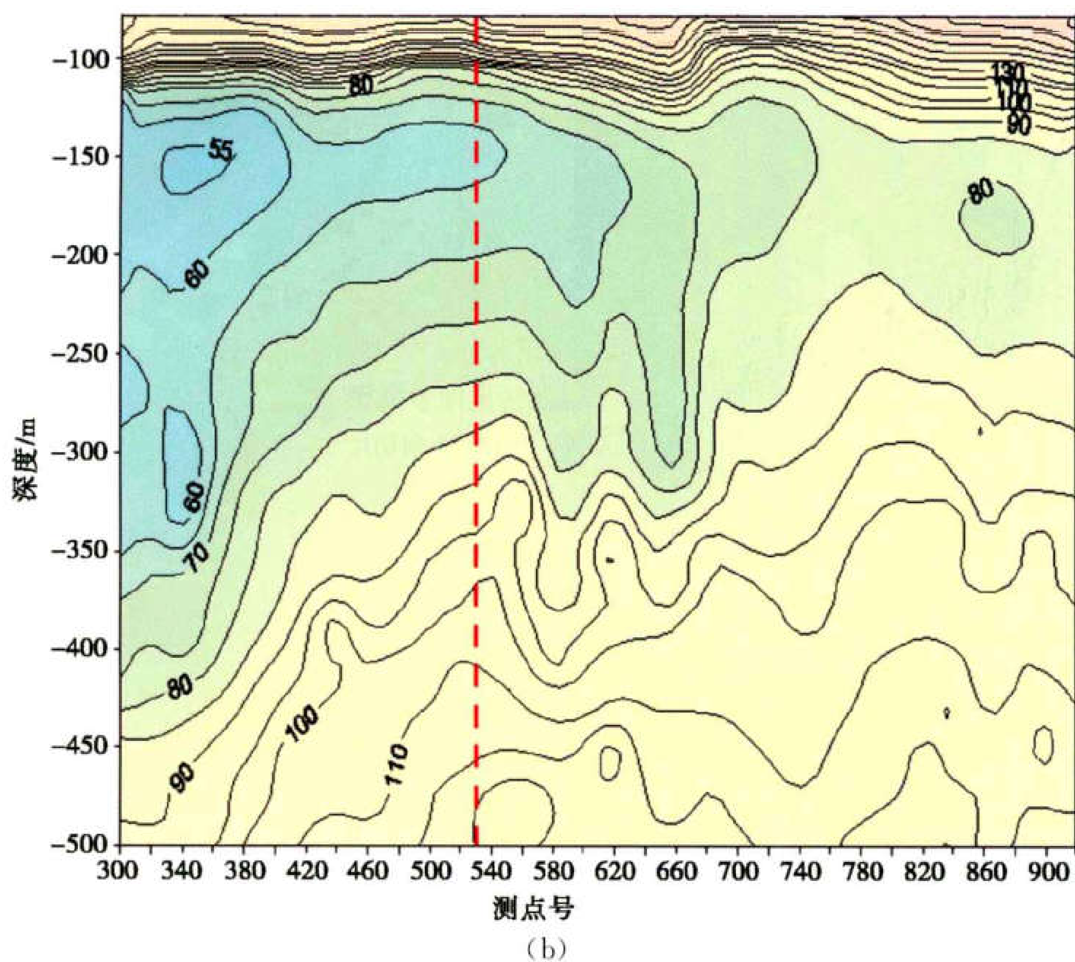



图 7.18　三维延拓成像效果

(a) 去掉低能反射部分；(b) 去掉高能反射部分




(a)




(b)

图 7.19 工区成果图

(a) 视电阻率平面图；(b) 典型剖面视电阻率等值线断面图

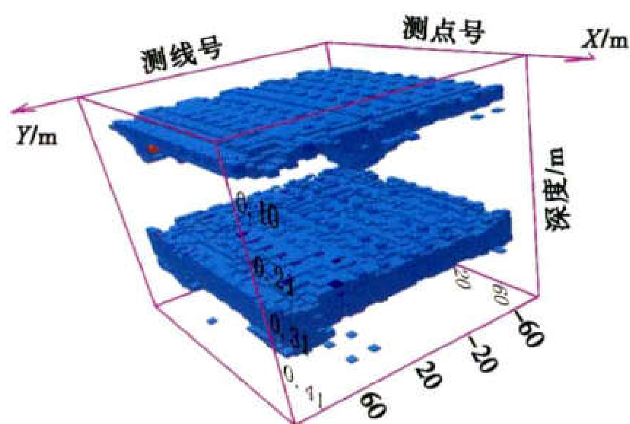



图 7.20 典型地段成像三维镂空图

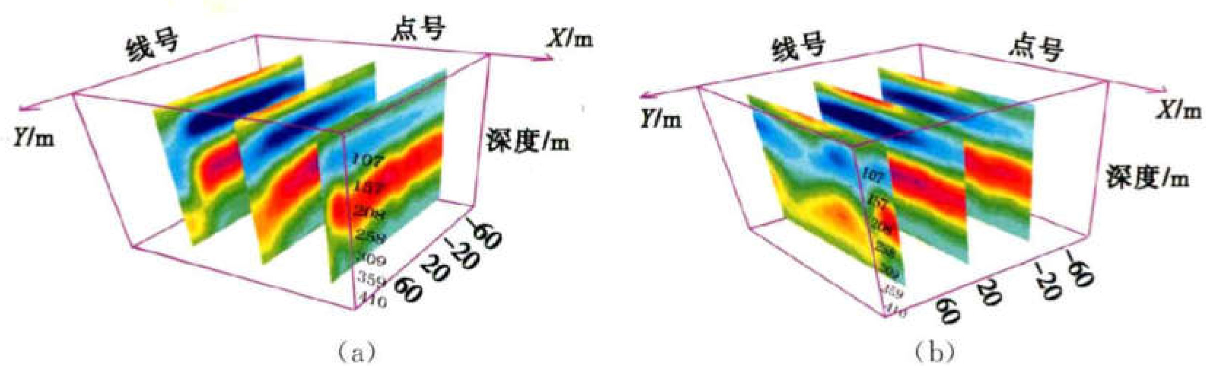



图 7.21 三维波场成像效果图

(a) X 方向切片；(b) Y 方向切片